ln - Schar

Gegeben sei $f_t(x) = \frac{-t + \ln(x)}{tx}$

(a) Bestimme den max Def-bereich, führe ein die bezügliche Randbetrachtung durch und stelle mithilfe von $\boxed{\text{GEOGEBRA}}$ die Schar dar: gibt es Einschränkungen bezüglich t?

(b) Bestimme - soweit möglich - Nullstellen, Symmetrie, Grenzwerte (siehe auch (a)), Extrema und Wendepunkte.

(c) Alle Graphen der Schar gehen durch einen (gemeinsamen) Punkt: berechne!

(d) Berechne die Ortskurve aller Extrema.

(e) Berechne $\int f_t(x)\,d(x)$

(f) Untersuche, ob sich - sinnvollerweise - ein uneigentliches Integral mithilfe von $f_t(x)$ definieren lässt!

Wendepunkte

Notw. Bed. $f_t''(x)=0$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3-2t+2\ln x=0}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x = 3+2t \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1.5+t \quad |e^{()}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{x = e^{1.5+t}}}$$

Wir sparen uns an dieser Stelle die explizite Berechnung der 3. Ableitung; sie lautet

$$\boxed{f_t'''(x) = \frac{11+6t-6\ln x}{t\cdot x^4}}$$

und $f_t'''(e^{1,5+t}) = \dfrac{11+6t-6(1,5+t)}{\left[t\cdot(e^{1,5+t})\right]^4}$

$\neq 0$

$\Rightarrow$ WP bei $x = e^{1,5+t}$ $\boxed{7}$

c) $f_t(x) = \frac{-t+\ln x}{tx}$

Wir betrachten ($t_1 \neq t_2$) 2 verschiedene Graphen, die einen gemeinsamen Punkt haben sollen:

$$\frac{-t_1+\ln x}{t_1 \cdot x} \overset{?}{=} \frac{-t_2+\ln x}{t_2 \cdot x} \quad \Big| \cdot t_1 t_2 x$$

$$(-t_1+\ln x)t_2 = (-t_2+\ln x)t_1$$

$$-t_1t_2+t_2\ln x = -t_1t_2+t_1\ln x \quad | +t_1t_2$$

$$t_2 \ln x = t_1 \ln x \quad | -t_1 \ln x$$

$$(t_2-t_1)\ln x = 0 \quad | :(t_2-t_1) \neq 0$$

$$\ln x = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Alle Graphen der Schar gehen durch $(1|f_t(1))$

$= (1|-1)$ (Graf 4!!)

(d) Ortslinie der Extrema — nachv! grafik?

Es war $\boxed{f_t'(x)=0}$

$\Leftrightarrow \boxed{1+t-\ln x=0}$

[1.] Wir lösen diese Gl. nach t auf:

$$\boxed{t=\ln x-1}$$

[2] und setzen das in $f_t(x)$ ein:

$$f'_{t=\ln x-1}(x)=\frac{-(\ln x-1)+\ln x}{(\ln x-1)\cdot x}$$

$$=\frac{\boxed{1-\ln x+\ln x}}{x(\ln x-1)}$$

$$\boxed{=\frac{1}{x(\ln(x)-1)}}$$ ✓

Ortslinie der Extrema

(Grafik!)

9

(e) $\int l_t(x)\,dx$

$\stackrel{!}{=} \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{t} \cdot \frac{\ln x}{x} \right] dx$

$= \boxed{-\int \frac{1}{x}\,dx} + \frac{1}{t} \boxed{\int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx}$

$= -\ln x + \frac{1}{t} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx$

Nebenrechnung

$\boxed{\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}} = \left[u \cdot v - \int u \cdot v' \right]$

$\boxed{= \ln x \cdot \ln x - \boxed{\int \ln x \cdot \frac{1}{x}}}$

$\stackrel{!}{\Longleftrightarrow} \int \frac{1}{x} \cdot \ln x = (\ln x)^2 - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad \Big| + \int \frac{1}{x} \cdot \ln x$

$\Longleftrightarrow 2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x = (\ln x)^2 \quad |:2$

$\Longleftrightarrow \boxed{\int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx = \frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 + C}$

10

Zusammen:

$$\int l_t(x)\,dx = -\ln x + \frac{1}{t}\cdot\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right] + C$$

$$= -\ln x + \frac{1}{2t}\cdot(\ln x)^2 + C$$

① Es sei exemplarisch $t>0$, z.B $a>1$ und

$$\int_a^\infty l_t(x)\,dx = ?$$

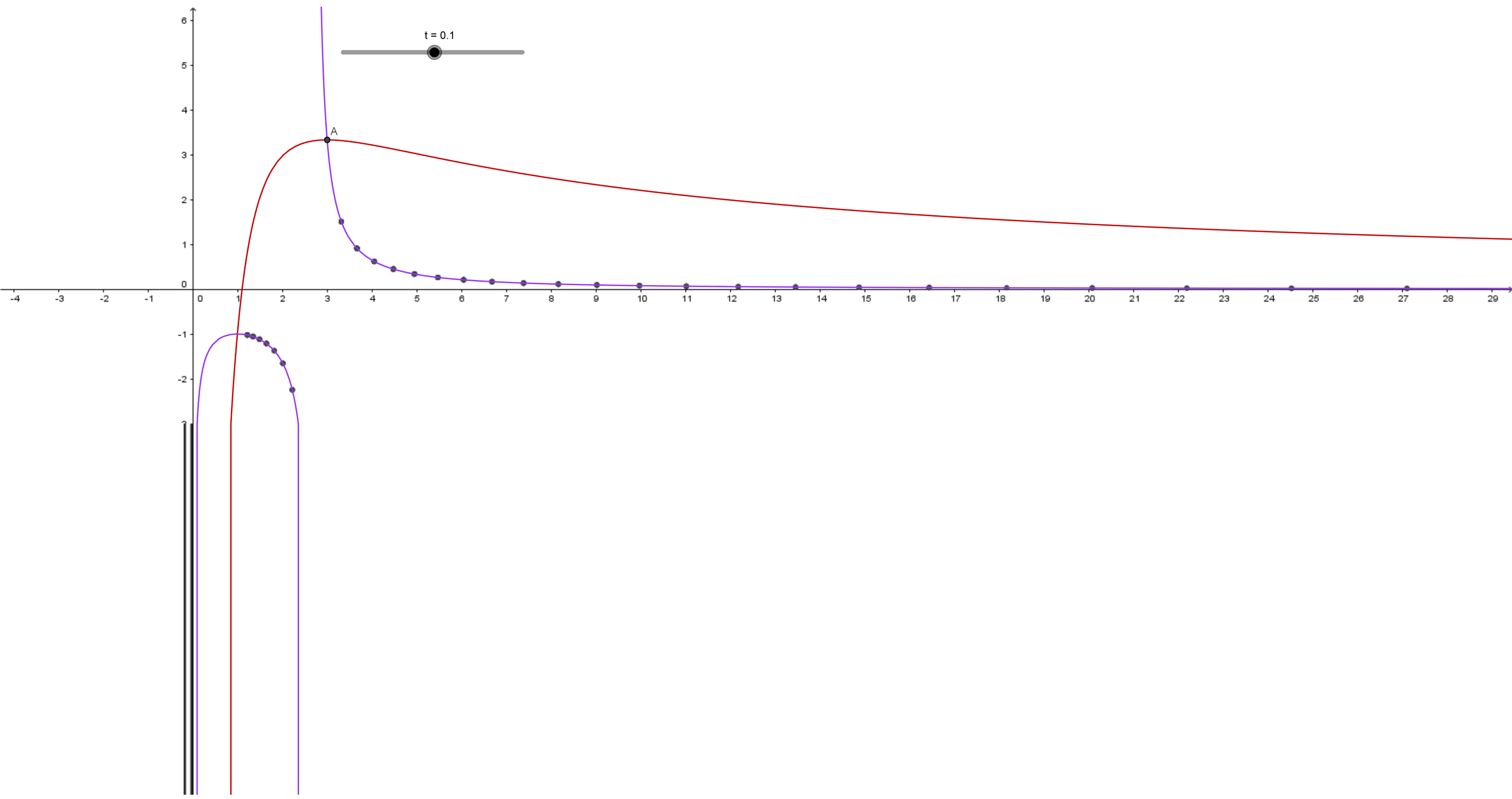
Wir berechnen

$$\int_a^{s>a} l_t(x)\,dx = \left[-\ln x + \frac{1}{2t}(\ln x)^2\right]_a^s$$

$$= \underbrace{\boxed{\left[-\ln s + \frac{1}{2t}(\ln s)^2\right]}}_{\substack{\text{Für } s \to +\infty \\ \text{strebt der Ausdruck} \\ \text{gegen Unendlich}}} - \boxed{\left[-\ln a + \frac{1}{2t}(\ln a)^2\right]}$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty l_t(x)\,dx \text{ ist nicht definiert.}$$

12



t = 0.1
A