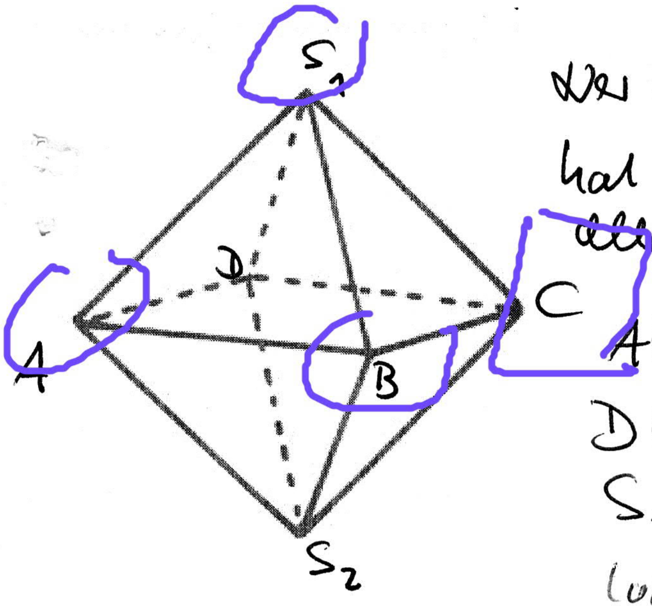



Der nebenstehende „Oktaeder des Grauens" hat eine quadratische ABCD-Fläche, alle 8 Δ'e sind gleichseitig u. kongruent.

A(13|−5|3) B(11|3|1) C(5|3|7)

D(?|?|?)

$S_1$(13|1|9) $S_2$(?|?|?)

Lotfußpkt:
HNF

(a) Wie weit ist C von der Ebene $ABS_1$ entfernt?

(b) Die Ebene E enthält A, B, C, D: geben Sie alle möglichen Ebenenformen zu E an.

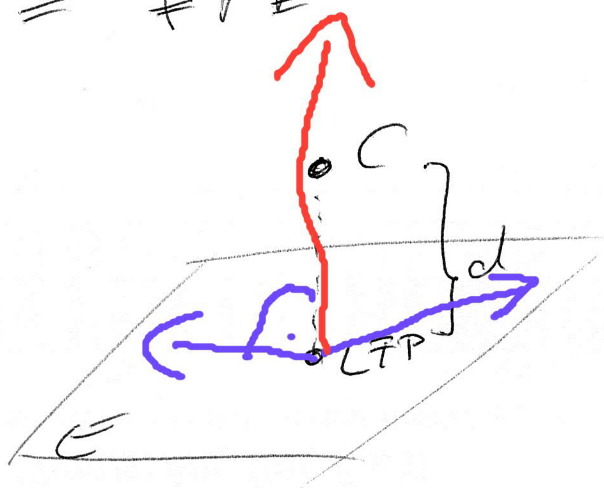
(c) Spiegelt man $S_1$ an E, so erhält man $S_2$: gesucht sind die Koordinaten von $S_2$.

(d) Wie groß ist der Winkel zwischen zwei Seitenflächen?

(e) Gesucht ist der Abstand der Geraden $g_{AB}$ und $g_{CS_1}$

(f) Gesucht ist im Δ $ABS_1$ die Länge der Höhe.

zu a) Lotfußpunktverfahren




$d = |\overrightarrow{L_{FP}C}|$ !!!

1. Schritt Bestimme $\vec{n}_E$!

A(13|-5|3) B(11|3|1) $S_1$(13|1|9)

$\vec{u}_E = \begin{pmatrix} 13-11 \\ -5-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_E = \begin{pmatrix} 11-13 \\ 3-1 \\ 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \perp \vec{u}_E \wedge \vec{n} \perp \vec{v}_E \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2n_1 - 8n_2 + 2n_3 = 0 \\ -2n_1 + 2n_2 - 8n_3 = 0 \end{vmatrix}$

Sei $n_3 = 1$

$\left| \begin{matrix} 2n_1 - 8n_2 = -2 \\ -2n_1 + 2n_2 = +8 \end{matrix} \right| \rbrack +$

$\left| \begin{matrix} 2n_1 - 8n_2 = -2 \\ -6n_2 = 6 \end{matrix} \right|$

also $n_3 = 1$

$n_2 = -1$

$n_1 = -5$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$g_{C,LFP}: \vec{x} = \underset{C}{\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}} + \alpha \underset{\vec{m}}{\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

3. Schritt

$$g \cap E \hat{=} LFP$$

$$\begin{pmatrix}5-5\alpha\\3-\alpha\\7+\alpha\end{pmatrix} = \underset{A}{\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}} + r\cdot\underset{\vec{u}}{\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}} + s\underset{\vec{v}}{\begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} -2r+2s-5\alpha=8 \\ 8r-2s-\alpha=-8 \\ -2r+8s+\alpha=-4 \end{array}\right| \ominus$$

$$\left|\begin{array}{l} -2r+2s-5\alpha=8 \\ 8r-2s-\alpha=-8 \\ 0r-6s-6\alpha=12 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \oplus \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} -2r+2s-5\alpha=8 \\ 6s-21\alpha=24 \\ -6s-6\alpha=12 \end{array}\right| \oplus$$

$$\left|\begin{array}{l} -2r+2s-5\alpha=8 \\ 6s-21\alpha=24 \\ -27\alpha=36 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{36}{27} = -\frac{4}{3} \quad [\text{genügt schon}]$$

$$g: \vec{x}_{LFP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + (-4/3) \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \frac{20}{3} \\ 3 + \frac{4}{3} \\ 7 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/3 \\ 13/3 \\ 17/3 \end{pmatrix}$$

4. Schritt

$$d = |\overrightarrow{LFP\,C}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35/3 \\ 13/3 \\ 17/3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -20/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right|$$

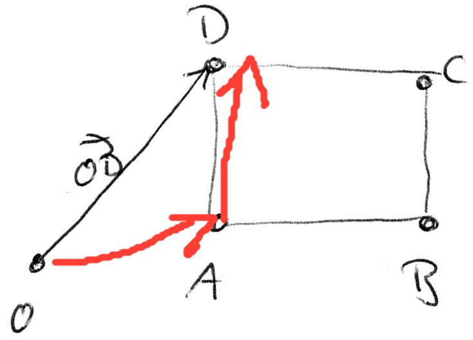
$$= \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9}}$$

$$\approx \underline{\underline{6{,}93}}$$

Bitte STETS die Beispiele aus dem EIGENEN Lehrbuch/Unterricht hierzu lesen und durcharbeiten und lernen.

Zu b) $E_{ABCD}$ : ~~A(13~~ $A(13|-5|3)$ $B(11|3|1)$

$C(5|3|7)$ $D(?|?|?)$




Es ist $\vec{AD} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} 5-11 \\ 3-3 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Weiter gilt

$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

$D(7|-5|9)$

$$E_{ABC[D]} : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A-B} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}_{B-C}$$

Punkt-Richtungs-Form

Man prüft

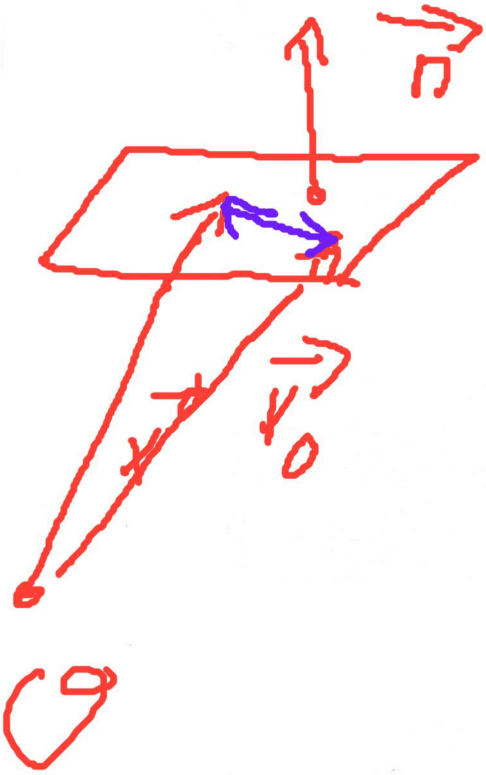
$$\boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

$D \in E$ ?

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2r + 6s = -6 \\ -8r + 0s = 0 \\ 2r - 6s = 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r = 0 \\ s = -1 \end{array} \right|$$

4 ✓

Normalenform $\vec{n}\cdot\left[\vec{x}-\vec{x_0}\right]=0$




$$\vec{n}\perp\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix},\ \vec{n}\perp\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix}2n_1-8n_2+2n_3=0\\6n_1+0n_2-6n_3=0\end{matrix}\right| \text{ Sei } \boxed{n_3=1}$$

$$\left|\begin{matrix}2n_1-8n_2=-2\\6n_1=6\end{matrix}\right| \Rightarrow \boxed{n_1=1}\ \boxed{n_2=1/2}$$

$$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$E:\ \underset{\vec{n}}{\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}}\cdot\left[\underset{\vec{x}}{\vec{x}}-\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}\right]=0$$

beliebige Ebenenp.

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich die $\boxed{\text{Koordinatenform}}$

$$E:\ \begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}x_1-13\\x_2+5\\x_3-3\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{x_1-13}+\underline{\tfrac{1}{2}x_2+\tfrac{5}{2}}+\underline{x_3-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x_1+\tfrac{1}{2}x_2+x_3=16-\tfrac{5}{2}=\underline{13{,}5}$$

Multipliziert man (eine) Normalenform mit dem Kehrwert der Länge von $\vec{n}$, so erhält man die Hesseform [Hessesche Normalenform]:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}\right]=0} \qquad \Big|\cdot\frac{2}{3}$$

!!!

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+\frac{1}{4}+1}$$

$$= \sqrt{2\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}\right]=0 \qquad \text{HNF}$$

oder

$$\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\vec{x}-\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}\vec{x}-\left[\frac{26}{3}-\frac{5}{3}+\frac{6}{3}\right]=0 \qquad \Big|+[\ \ ]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}}_{n_0\ \text{Normaleneinheitsvektor}}\vec{x} = 9$$

↑ Abstand der Ebene vom Nullpunkt

6