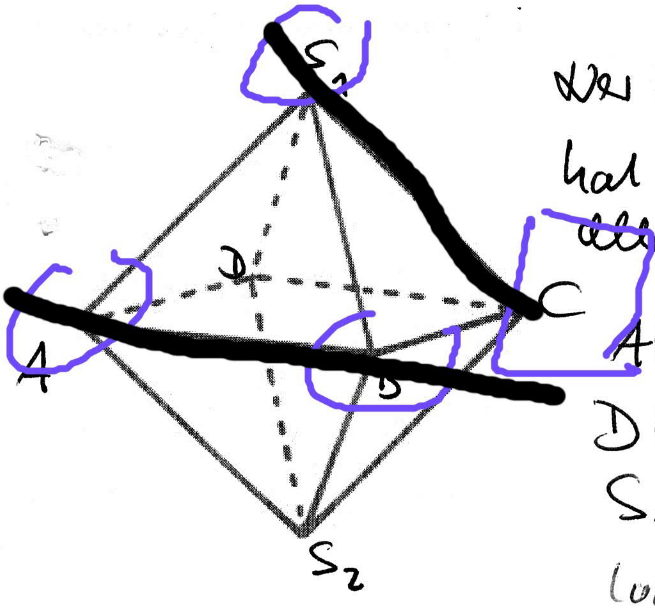


Das nebenstehende „Oktaeder des Grauens" hat eine quadratische ABCD-Fläche, alle 8 Δ'e sind gleichseitig u. kongruent.

$A(13|-5|3)$ $B(11|3|1)$ $C(5|3|7)$

$D(?|?|?)$

$S_1(13|1|9)$ $S_2(?|?|?)$

Hilfsmittel: HNF

(a) Wie weit ist C von der Ebene ABS_1 entfernt?

(b) Die Ebene E enthält A, B, C, D: geben Sie alle möglichen Ebenenformen zu E an.

(c) Spiegelt man S_1 an E, so erhält man S_2: gesucht sind die Koordinaten von S_2.

(d) Wie groß ist der Winkel zwischen zwei Seitenflächen?

(e) Gesucht ist der Abstand der Geraden g_{AB} und g_{CS_1}

(f) Gesucht ist im Δ ABS_1 die Länge der Höhe.

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de

2uc Mögliche Vorgehensweise

① zu E senkrechte Geradengleichung g_s durch S_1

② Entfernung $S_1 \to$ Lotfußpunkt

③ " Übertrag " ergibt S_2

Wir wählen $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als RV von g_s

$\rightarrow$

$$g_s: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}}_{S_1} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow g_s \cap E$ Da wir die NF von E schon ermittelt haben, wählen wir die: [weniger Rechenarbeit]

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0}$$ g_s in E:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 13+\alpha \\ 1+\frac{1}{2}\alpha \\ 9+1\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{matrix} \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha + 6 \\ \alpha + 6 \end{matrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \tfrac{1}{4}\alpha + 3 + \alpha + 6 = 0$$

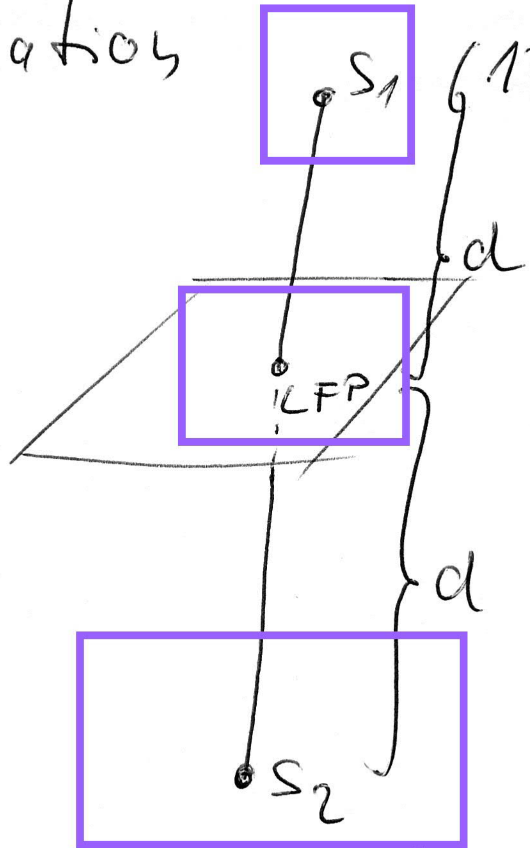
$$\tfrac{9}{4}\alpha = -9$$

$$\underline{\underline{\alpha = -4}}$$

$g_{s_{\alpha=-4}}: \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix}13\\1\\9\end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}}$

$= \begin{pmatrix}9\\-1\\5\end{pmatrix}$ LFP $(9|-1|5)$

Situation



$(13|1|9)$ g_s mit $\alpha=0$

$\downarrow$

LFP g_s mit $\alpha=-4$

$\downarrow$

S_2 g_s mit $\underline{\alpha=-8}$

$g_{s_{\alpha=-8}}: \vec{x} = \begin{pmatrix}13\\1\\9\end{pmatrix} + \boxed{(-8)}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\boxed{\underline{S_2(5|-3|1)}}$ ✓

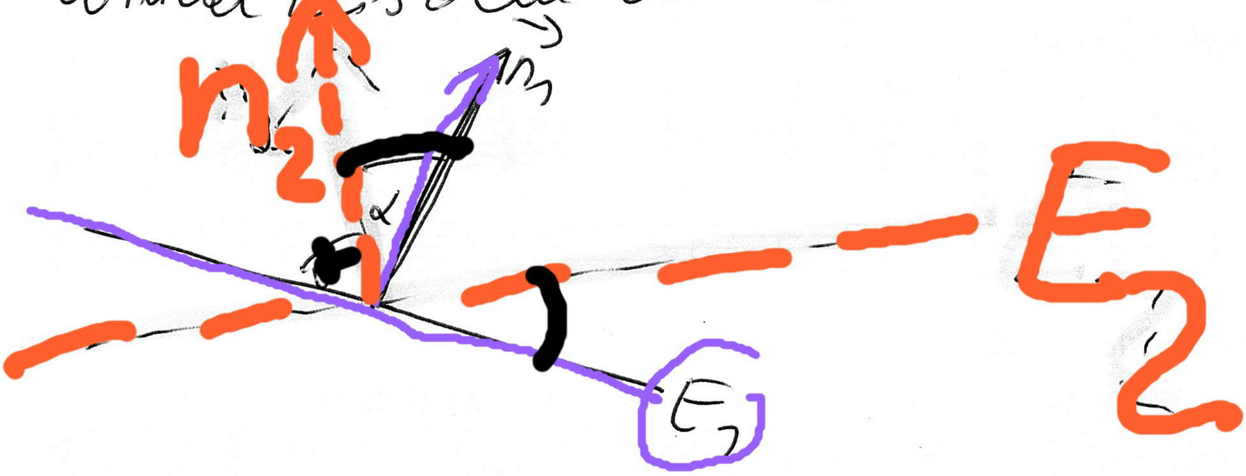
Bitte STETS die Beispiele aus dem EIGENEN Lehrbuch/Unterricht hierzu lesen und durcharbeiten und lernen.

d) Winkel zwischen 2 Seitenflächen

Wir wählen

$\boxed{E_{ABS_1}}$ und $\boxed{E_{BCS_2}}$ (z.B.)

Die beiden „Seitenflächen" sind als Ebenen interpretierbar, für den Winkel zwischen 2 sich schneidenden Ebenen wählt man den Winkel zwischen den Normalenvektoren.



aus Aufgabe (a) war

$$\vec{n}_{E_{ABS_1}} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix} \; !$$

Bitte STETS die Beispiele aus dem EIGENEN Lehrbuch/Unterricht hierzu lesen und durcharbeiten und lernen.

E_{BCS_2} $\quad B(11|3|1)\ C(5|3|7)$

$S_2(5|-3|1)$ aus Aufg(c)

<u>Wir bestimmen zuerst 2 RV'en:</u>

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 3-3 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$B-C$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 3+3 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$C-S_2$

Nun bestimmt man $\vec{n} \perp \vec{u} \wedge \vec{n} \perp \vec{v}$:

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 6n_1 + 0n_2 - 6n_3 = 0 \\ 0n_1 + 6n_2 + 6n_3 = 0 \end{array} \right.$$

Sei z.B. $n_3 = 1$

$$\left| \begin{array}{l} 6n_1 = 6 \\ 6n_2 = -6 \end{array} \right| \begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_2 = -1 \end{array}$$

$$\vec{n}_{E_{BCS_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\measuredangle\ \vec{n}_{E_{ABS_1}}, \vec{n}_{E_{BCS_2}}$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_{E_1} \cdot \vec{n}_{E_2}}{|\vec{n}_{E_1}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-5+1+1}{\sqrt{81}} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\varphi \approx 107{,}458^\circ$$

also $180^\circ - 107{,}5^\circ = \underline{\underline{71{,}5^\circ}}$

(e) Geradenabstand

$$g_{AB}: \vec{x} = \underset{A}{\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}} + \alpha \underset{A-B}{\begin{pmatrix}13-11\\-5-3\\3-1\end{pmatrix}}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}$$

$$g_{CS_1}: \vec{x} = \underset{C}{\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}} + \beta \underset{C-S_1}{\begin{pmatrix}5-13\\3-1\\7-9\end{pmatrix}}$$

$$x = \begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-8\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Offenbar nicht $\parallel$: $g_{AB} \nparallel g_{CS_1}$

[redacted]

Abstand windschiefe Geraden

$$d = \left| \frac{(\vec{p_1} - \vec{p_2}) \circ \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$ (z.B)

mit $\vec{p_1}$: Ortsvektor 1. Gerade
$\vec{p_2}$: Ortsvektor 2. Gerade
$\vec{n}$: steht senkrecht auf beide Geraden

Wir ermitteln $\vec{n}$:

$\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

d.h. $\left| \begin{array}{l} 2n_1 - 8n_2 + 2n_3 = 0 \\ -8n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 0 \end{array} \right|$ sei z.B. $n_3 = 1$

$$\begin{array}{rl} 2n_1 - 8n_2 = -2 & | \cdot 4 \\ -8n_1 + 2n_2 = 2 & \oplus \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2n_1 - 8n_2 = -2 \\ 0n_1 - 30n_2 = -6 \end{array} \right| \quad n_2 = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

und $2n_1 = -2 + 8 \cdot \frac{1}{5} = -\frac{10}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{2}{5}$

$n_1 = -\frac{1}{5}$

$$\vec{n} \perp g_1, g_2 \quad \begin{pmatrix} -11{,}5 \\ 11{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

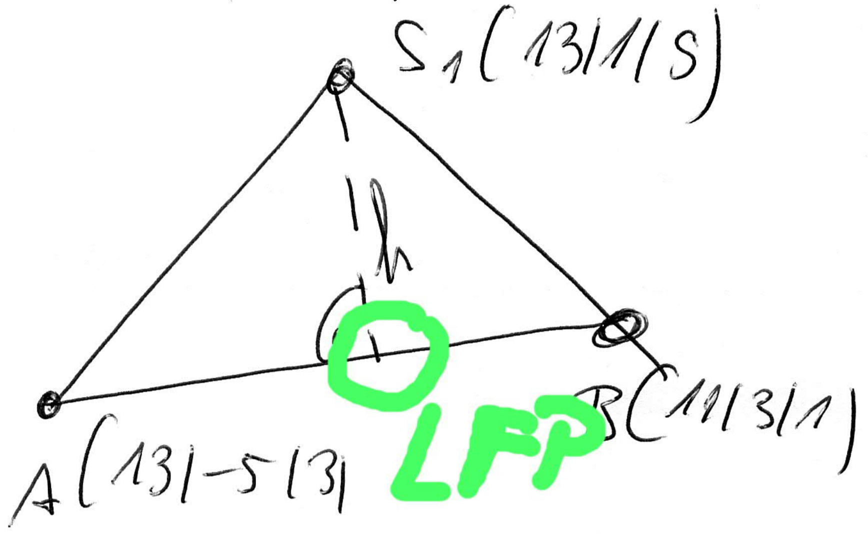
$$|\vec{n}| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

also

$$d = \left| \frac{\left[\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{3\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}{3\sqrt{3}} \right|$$

$$= \left| \frac{-8-8-20}{3\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-36}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

Bitte STETS die Beispiele aus dem EIGENEN Lehrbuch/Unterricht hierzu lesen und durcharbeiten und lernen.



Da das Δ gleichseitig ist, sind alle Höhen gleichlang.

Wir wählen das Lotfußpunktverfahren

$$\Rightarrow g_{AB}: \vec{x} = \underset{A}{\begin{pmatrix}13\\-5\\3\end{pmatrix}} + \alpha \underset{AB}{\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \text{LFP liegt auf } g_{AB}: \quad \vec{x}_{LFP} \begin{pmatrix}13+2\alpha\\-5-8\alpha\\3+2\alpha\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Vektor $\overrightarrow{L_{FP}S_1}$ steht senkrecht (!) auf g_{AB}

$$\underset{S_1 \;-\; LFP}{\begin{pmatrix}13-(13+2\alpha)\\1-(-5-8\alpha)\\9-(3+2\alpha)\end{pmatrix}} \cdot \underset{\text{RV von } g}{\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 6+8\alpha \\ 6-2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-4\alpha - 48 - 64\alpha + 12 - 4\alpha = 0$$

$$-72\alpha = 36$$

$$\alpha = -1/2$$

LFP: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13-1 \\ -5+4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$d_{S_1 LFP}$: $\left\| \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|$

S_1 LFP

$$= \sqrt{1+4+49}$$

$$= \sqrt{54}$$

$$= 3\sqrt{6}$$

✓.

15