Regeln σ-Intervalle

Man benötigt:

① Den Erwartungswert bei B-Ketten:

$$\boxed{E(X) = \mu = n \cdot p}$$

$E(X)$: Anzahl Treffer

n: Länge Kette

p: Treffer

② Die Standardabweichung bei B-Ketten:

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

Buchstaben wie oben

Wann gelten für folgende Regeln $\boxed{\sigma > 3 \text{ [Laplace-Bed.]}}$

$$P(\mu - 1 \cdot \sigma < X < \mu + 1 \cdot \sigma) \approx 0{,}68$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}995$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma < X < \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0{,}997$$

1σ-Regel … 2σ-Regel … 3σ-Regel

Beispiel

Wir werfen die Münze 100 mal, $X \hat{=}$ „Zahl"

(a) Berechne $E(X)=\mu$ und $\sigma(X)$

(b) Wende alle 3 σ - Regeln an.

(c) Benutze (b), um folgende Aussage zu beurteilen:

„Der Versuch ist 4 x durchgeführt worden, und zwar mit den Ergebnissen $X_1=57$ $X_2=59$ $X_3=60$ $X_4=61$."

Lösung

Es geht um eine B-Kette der Länge $n=100$ und $p(X)=p(\text{„Zahl"})=0{,}5$

Damit gilt

(a) $\mu=E(X)=n\cdot p=100\cdot 0{,}5=50$

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=5$$

(b) Offenbar gilt $\sigma>3$

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de

Damit erhält man

1σ - Regel

$$P(\mu - 1\cdot\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}68$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(50 - 1\cdot 5 \le X \le 50 + 1\cdot 5) \approx 0{,}68$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{P(45 \le X \le 55) \approx 0{,}68}}$$

$$\boxed{68\%}$$

2σ - Regel

$$P(50 - 2\cdot 5 \le X \le 50 + 2\cdot 5) \approx 0{,}995$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(40 \le X \le 60) \approx 0{,}995$$

$$\boxed{99{,}5\%}$$

3σ - Regel

$$P(50 - 3\cdot 5 \le X \le 50 + 3\cdot 5) \approx 0{,}997$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(35 \le X \le 65) \approx 0{,}997$$

zu c) Aus der 1σ Regel ergibt sich also
68% aller Ergebnisse liegen im Bereich $45 \to 55$
d.h. 32% aller Ergebnisse liegen außerhalb
Der angegebene Ausfall $[X_1 = 57, X_2 = 58, X_3 = 60, X_4 = 61]$ hat also die Wahrscheinlichkeit $0{,}32^4 \approx 0{,}01 = 1\%$, ist also eher unwahrscheinlich.

Hinweis

① Natürlich gibt es auch – die eher seltenen – 4σ – 5σ .... Regeln.

② Die W der σ-Regeln sind eher „krumme" Werte 0,68; 0,995 usw
Alternativ zur 1σ-Regel gibt es die
90%-Regel:

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \overset{!}{=} 90\%$$

usw

σ - Regeln

Wir betrachten binomialverteilte Zufallsgrößen mit $E(X) = \mu = n \cdot p$ und $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Für $\sigma > 3$ [Laplace-Bedingung] gelten die σ-Regeln:

$$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 68{,}3\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$$

$$P(\mu - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ganzzahlige Faktoren}}}{3}\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx \underbrace{99{,}7\%}_{\text{„krumme" Werte}}$$

oder

$$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$$

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$$

$$P(\mu - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{„krumme" Faktoren}}}{2{,}58}\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx \underbrace{99\%}_{\text{„glatte" Werte}}$$