Einseitiger Signifikanztest

In vielen Aufgaben geht es um die Frage, ob eine vermutete Wahrscheinlichkeit korrekt ist.

$\boxed{\text{Beispiel}}$ Ein Wildhändler behauptet, 70% seines Angebotes sei „frisch."
Zur Überprüfung werden $\boxed{\text{50 Stück}}$ Wild ausgewählt.

H_0 mit $p_0 \geq 0.7$ [„Mehr als 70% des Angebotes ist frisch]

H_1 mit $p_1 < 0.7$ [Der Händler schummelt]

Wir berechnen

$n = 50 \quad p_0 = 0.7 \Rightarrow \mu = n \cdot p = 35$

und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ TR $\approx 3{,}3$

also $\sigma > 3$ [Laplace-Bedingung]

→ Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn in der Stichprobe sehr viel weniger frische Wildstücke sind als zu erwarten wäre.

→ Der Ablehnungsbereich liegt also links vom Erwartungswert: linksseitiger Signifikanztest

→ Wir geben $\alpha = 5\%$ vor [Fehler der 1. Art]
gesucht ist also der Annahmebereich $[b; n]$, in dem mindestens 95% der Ergebnisse liegen sollen: $\boxed{P(X \geq b) \geq 95\%}$

Mit den bekannten Werten „probiert" man sich „an b heran" (TR, Tabelle o.ä.) und erhält

$$b = 30$$

d.h. $[30;50]$ ist der Annahmebereich zu $p_0 \geq 0{,}7$.

Bemerkungen

Die gewählte H_0 Hypothese ist eher eine Hypothese, die dem Händler zugute kommt.

Aus Sicht des Fleischkäufers müssten man eher H_0 mit $p_0 \leq 0{,}7$ testen: das Risiko, gammeliges Fleisch zu erhalten, sollte ja minimal sein: eine entsprechende Rechnung führt hier auf den Wert 40, um zu 95% sicher zu sein, gute Ware zu erhalten.

2-seitiger Signifikanztest

Beispiel Ein Falschspieler hat echte und gefälschte Münzen in seiner Tasche.
Er nimmt eine, wirft sie 100 mal und zählt „Kopf".
Weicht sein Ergebnis um mehr als 10 vom Erwartungswert 50 ab, so wird die Münze als gefälscht eingestuft.

H_0: Die Münze ist echt $\quad p_0 = 0{,}5$

H_1: Die Münze ist gefälscht $\quad p_1 \neq 0{,}5$

Bereiche

$\mu = E(X)$

$$\{\underbrace{0, 1, \ldots, 40}_{A_{H_1}};\ \underbrace{41, \ldots, 59}_{A_{H_0}};\ \underbrace{60, 61, \ldots, 100}_{A_{H_1}}\}$$

$\boxed{\text{zweiseitiger Signifikanztest}}$

$\alpha \mathrel{\hat=}$ Fehler 1. Art = Signifikanzniveau

$$= P_{p_0}(\underbrace{X \le 40}_{\bar{A}_{H_0}}) + P_{p_0}(\underbrace{X \ge 60}_{\bar{A}_{H_0}})$$

$$= P_{p_0}(X \le 40) + 1 - P_{p_0}(X < 60)$$

$$\overset{TR}{\approx} 0{,}0284 + 0{,}028$$

$$\approx 0{,}06 = \underline{\underline{6\,\%}}$$

Ergänzung Der α-Fehler (Fehler 1. Art) ist uns zu groß; wir möchten ihn auf <u>maximal 1%</u> drücken.

Bemerkung Gibt man – wie bei vielen derartigen Aufgaben – den α-Fehler vor, so sind die – neuen! – Annahme- bzw. Ablehnungsbereiche zu bestimmen, bei sonst gleichbleibenden Parameter.

Ansatz Weicht die „Kopfzahl" um mehr als Z vom Erwartungswert 50 ab, so wird die Münze als „gezinkt" betrachtet; dabei soll gelten

$$\alpha \mathrel{\hat=} \text{Fehler 1. Art} \le 1\%$$

$$P_{p_0}(\text{Entsch. für } H_1) \le 0{,}01$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P_{p_0}(X \le 50 - Z) + P_{p_0}(X \ge 50 + Z) \le 0{,}01$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P_{p_0}(X \le 50 - Z) + \left[1 - P_{p_0}(X < 49 + Z)\right] \le 0{,}01$$

TR
Tabelle
Liste

⟹ ~~[illegible]~~

$Z = 12$ $\alpha = 0{,}011 + 0{,}011 = 0{,}022 = 2{,}2\%$

$Z = 13$ $\alpha = 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}012 = 1{,}2\%$ AHA!

⟹ $Z = 14$ $\alpha = 0{,}003 + 0{,}003 = 0{,}006 \approx 0{,}6\%$

2