Anpassung der Glockenkurve an die Binomialverteilung (für große n!!)

1. Schritt Verschiebung der Glockenkurve φ um „$\mu = E(X)$" nach rechts:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\boxed{\rightarrow \varphi(x-\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}}$$

2. Schritt Das neue „$\varphi(x-\mu)$" wird nun „abgeflacht" und „breiter gemacht".

$$\varphi(x-\mu) =$$

$$\rightarrow \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\boxed{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

und es gilt nun:

Die Binomialverteilung $B(n, p, k)$ lässt sich für große n (!) und $\sigma > 3$ näherungsweise durch $\varphi_{\mu,s}(x)$ annähern, es gilt

$$\boxed{B(n; p; k) \approx \varphi_{\mu,s}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Beispiel Platinen werden mit 3% Ausschuß hergestellt. Wie groß ist die W, in 500 Bauteilen genau 12 defekte zu finden?

$n = 500$ (großes n!) $p_{defekt} = 0{,}03$ $k = 12$

$\cancel{B(500; \ldots)} \approx$

$$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}03 = 15$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{500 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} \approx 3{,}8 > 3 \;!!$$

x !!!

$$B(500; 0{,}03; 12) \approx \varphi_{\mu,s}(x) = \frac{1}{3{,}8 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(12-15)^2}{2 \cdot 3{,}8^2}} \approx 0{,}08$$

4

Die globale Näherungsformel von Laplace und de Moivre

~~aus dem letzten Video wissen wir.~~

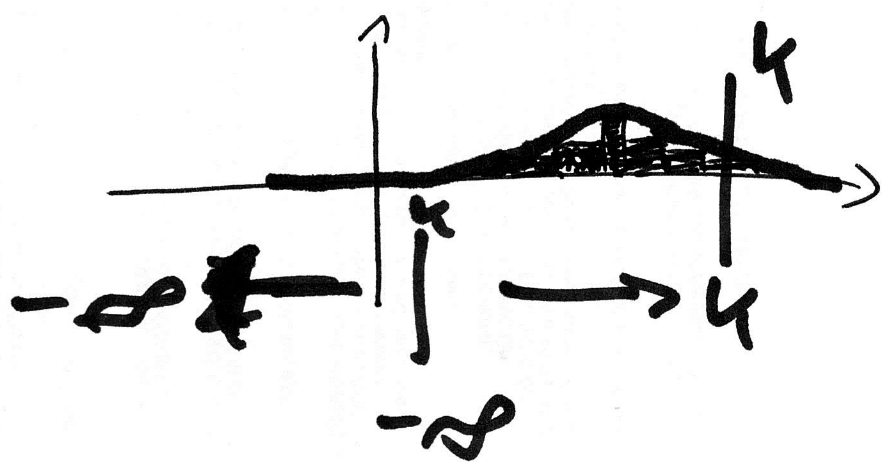
$$\boxed{B(n;p;x) \approx \varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\sigma > 3\\ \text{große } n\end{matrix}}}$$

Für die kumulierte Binomialverteilung gilt

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \dots + B(n;p;k) \approx \int_{-\infty}^{k} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

uneigentliches Integral

uneigentliches, elementar nicht berechenbares Integral



1. Beispiel | Ein Bauteil wird mit 12% Ausschuß hergestellt. Mit welcher W sind von 1000 Bauteilen 120 oder mehr unbrauchbar?

$n = 1000 \quad p_{defekt} = 0{,}12 \qquad k \geq 120$

$\mu = E(X) = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}12 = \underline{\underline{120}}$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{120 \cdot (1-0{,}12)}$

$\approx 10{,}3 > 3$!!

großes n!

$P(X \geq 120) = 1 - P(X < 120)$

$= 1 - F(1000; 0{,}12; 119)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{\overset{k}{119} - \overset{n}{1000} \cdot \overset{p}{0{,}12}}{\underset{\sigma}{10{,}3}}\right)$

$\overset{TR}{=} 1 - \Phi(-0{,}097)$

$\underset{\text{Tabelle}}{\overset{TR}{\approx}} \underline{\underline{0{,}54}}$

2. Beispiel | Für einen Test mit 800 Probanden und $p=0{,}4$ soll der Annahmebereich $[a;b]$ so festgelegt werden, daß

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) \approx 0{,}97 \text{ ist!}}$$

Lösung

$n=800 \quad p=0{,}4$

$\mu = E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}4 = 320$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{320 \cdot 0{,}6} \approx \underline{\underline{13{,}8873}}$

Wegen der Symmetrie gilt mit $P(X<a) = P(X>b)$ und

$$\underline{\underline{P(X<a)}} = \underline{\underline{P(X>b)}} = [1 - P(a \leq X \leq b)] \cdot 0{,}5$$

$$= [1 - 0{,}97] \cdot 0{,}5$$

$$= \underline{\underline{0{,}015}}$$

Gesucht ist also das kleinste x ($x \in \mathbb{N}$!!) mit $\Phi(x) \geq 1 - 0{,}015$

$\geq 0{,}985$

$\xrightarrow[\text{Tabelle}]{\text{TR}} \quad x \approx 2{,}17$

Über die σ-Regel

$[\mu - x \cdot \sigma ; \mu + x\sigma]$ ergibt sich

TR

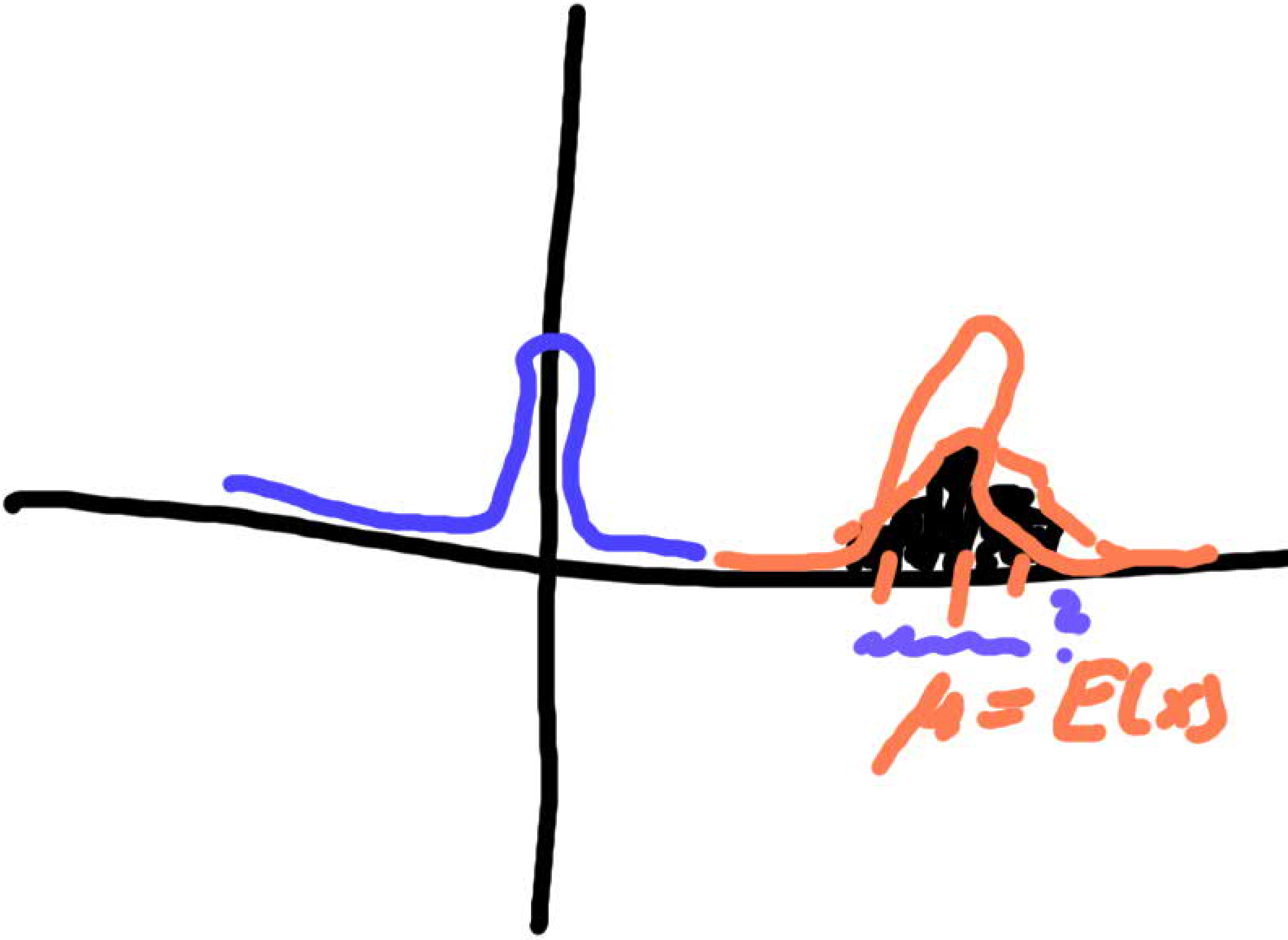
$\approx [289{,}9 ; 350{,}1]$ also ($x \in \mathbb{N}$!)

$\approx [290 ; 350]$

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de


$\mu = E(x)$