Vollständige Induktion

(Anschauungsmensch)

PRINZIP

Ist eine Aussage/Gleichung usw von $n \in N$ abhängig, so

1. rechnet man konkret nach, ob sie für $n=1$ gilt (oder $n=0$) (Manchmal gehts auch erst bei $n=2$ los)

Aussage Gleichung: $\boxed{2^0+2^1+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-1}$

von n abhängig

Wir prüfen zu Fuß für $n=0$

$$2^0 \overset{?}{=} 2^{0+1}-1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1 = 2^1-1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{1=1}}$$ jo, stimmt!

(2.) Wir sehen voraus, dass sie für n stimmt:

$$\boxed{2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1}$$

soll richtig sein

(3) Nun ist zu zeigen, daß die obige Aussage auch für $(n+1)$ gilt, also zu zeigen:

$$\boxed{2^0+2^1+\ldots+2^n+2^{n+1}=2^{(n+1)+1}-1}$$

Das geht so:

$$2^0+2^1+\ldots+2^n+2^{n+1}$$

$$=\underbrace{\left(2^0+2^1+\ldots+2^n\right)}+2^{n+1}$$

$$=\quad 2^{n+1}-1\quad+2^{n+1}$$

$$=2^1\cdot 2^{n+1}-1$$

$$=2^{(n+1)+1}-1$$

$\boxed{2}$

Bemerkung: Die Gleichung unter ⑤ ist hier so bewiesen worden, daß man die linke Seite hingeschrieben und so umgeformt hat, dass die rechte Seite herauskommt.

2. Beispiel (kurz)

Beweise durch vollständige I:

$$\boxed{2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)}$$

① Sei $n=1$:

$$2\cdot 1 \stackrel{?}{=} 1\cdot(1+1)$$

$$2 = 1\cdot(2)$$

$$2 = 2$$ ja, stimmt

② Die Gleichung gelte für n:

$$\boxed{2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)}$$

sei richtig

3

(3) Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$\boxed{2+4+6+\ldots+2n+2(n+1)=(n+1)[(n+1)+1]}$$

gilt

Wir beginnen wieder mit der linken Seite und rechnen sie aus:

$$2+4+6+\ldots+2n+2(n+1)$$

$$=\underbrace{[2+4+6+\ldots+2n]}+2(n+1)$$

$$= n(n+1) + 2(n+1) \quad \text{ausklammern}$$

$$= (n+1)\cdot[n+2] \quad \text{umformen}$$

$$= (n+1)\cdot[(n+1)+1] \quad \text{fertig}$$

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de

Letztes Beispiel | Für $n \geq 2$ (!!) und $x > -1$
und $x \neq 0$ gilt

n. alt.? $\rightarrow$ $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$

1. $\boxed{n=2 \quad (1+x)^2 > 1+2x}$

$\Leftrightarrow 1+2x+x^2 > 1+2x$ ja, weil $x^2>0$ für $x \neq 0$

2. $\boxed{\text{Nun gelte } (1+x)^n > 1+n \cdot x}$

zu zeige 3.

Dann gilt auch $\boxed{(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot x}$

Los gehts:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}\cdot(1+x) > \underbrace{(1+n\cdot x)}\cdot(1+x)$$

$$= 1 + x + n \cdot x \cdot 1 + n \cdot x \cdot x$$

$$= 1 + (1+n)\cdot x + n x^2 \quad > 0$$

$$> 1+(1+n)x$$

fertig