Differentialrechnung 5

I

Tangente und Normale

Vorbemerkung: Hinter dem Differentialquotienten einer Funktion „verbergen" sich eigentlich 2 Aufgaben:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \boxed{f'(x_0)}$$

und

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} = \boxed{m_{t\ \text{an } f\ \text{in } x_0}}$$

1. Beispiel

Aus den vorangegangenen Videos wissen wir

$$f(x)=x^2 \quad \underbrace{f'(x_0)=2x_0}$$

1. Ableitung von x_0
ODER
Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0

Wir berechnen – lediglich $\boxed{f(x)=x^2}$ – die Tangentengleichung der Tangente an f an der Stelle $x_0=5$

1. Schritt Bestimmung der Tangentensteigung

Es ist $f(x)=x^2$

$f'(x_0)=2x_0$ also

$f'(5)=2\cdot 5=\boxed{10=m_T}$

2. Schritt Für die Stelle x_0 gilt

$x_0=5$ also $P_0(5|f(5))=\boxed{P_0(5|25)}$

Nun ist

$\boxed{t: y=m\,x+n}$ die allgemeine Tangentengleichung

also $t: \quad y=10\cdot x+n$ $P_0(5|25)$ einsetzen

$t: \quad 25=10\cdot 5+n \quad |-50$

$-25=n$

$$\boxed{t: y=10\cdot x-25}$$

2

Ergebnis: Legt man an $f(x)=x^2$ in $x_0=5$ eine Tangente an den Graphen von f, so lautet diese Tangentengleichung

$$t: \; y = 10 \cdot x - 25$$

$\boxed{\text{Allgemein}}$

Sei $y=f(x)$ eine differenzierbare Funktion an der Stelle x_0 und sei $f'(x_0)$ die erste Ableitung / MT

Dann ist

$t_{\text{an } f \text{ im } x_0}$: $\boxed{y = m \cdot x + n}$ $\boxed{m = f'(x_0)}$ $\boxed{P_0(x_0 | f(x_0))}$

$$y = f'(x_0) \cdot x + n$$

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + n \quad | -f'(x_0) \cdot x_0$$

$$f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = n$$

also insgesamt:

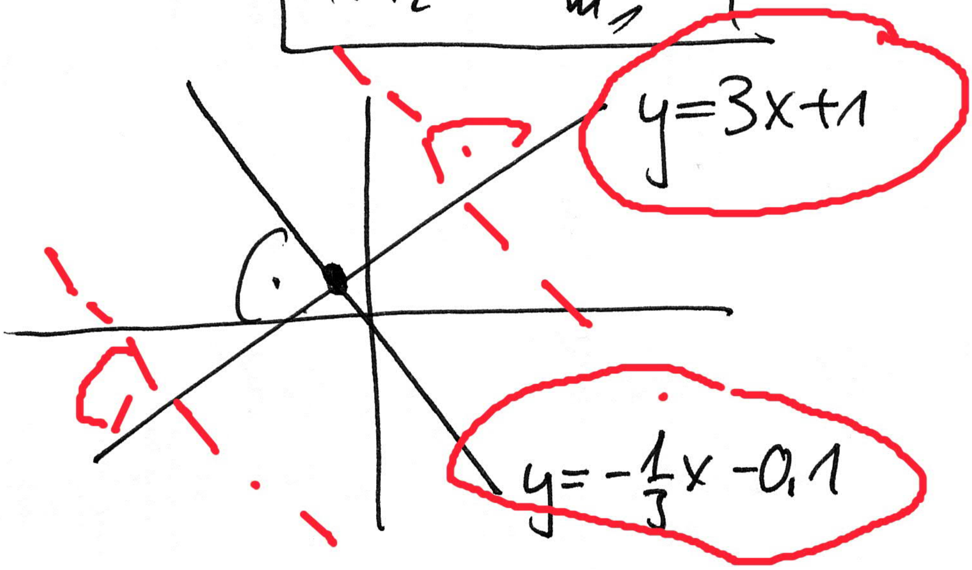
$$t_{\text{an } f \text{ im } x_0}: y = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot x + \underbrace{[f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0]}_{n}$$

Vorbemerkung Stehen 2 Geraden senkrecht aufeinander, so gilt

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$ oder !!!!!

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$ oder

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$



$$m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

Beispiel Es war $f(x) = x^2$ $f'(x_0) = m_t = 2x_0$

t: $y = 10x - 25$ in $P_0(5|25)$

Dann berechnet man die Normalengleichung so:

$$y_N = m_N \cdot x + z$$

$P_0(5|25)$ $m_T = 10$ also ist $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{10}$

$$N: \; y_N = -\frac{1}{10} \cdot x + z \quad P_0(5|25) \text{ ansetzen}$$

$$25 = -\frac{1}{10} \cdot 5 + z \quad | \text{ vereinfachen}$$

$$25 = -\frac{1}{2} + z \quad | + \frac{1}{2}$$

$$25{,}5 = z$$

$$N: \; \boxed{y_N = -\frac{1}{10} x + 25{,}5}$$

Gleichung der Normalen an $f(x) = x^2$ im $P_0(5|25)$

Ausblick: Übungen mit Lösungen