Differentialrechnung 7

Ableitungsfunktion und Ableitung der Potenzfunktion

Zusammenfassung aus 5/6

Ist eine Funktion f differenzierbar,

- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $x_0 \in D(f)$ existiert und ist eindeutig –

so heißt die Funktion

$$\boxed{f' : x_0 \longrightarrow f'(x_0)}$$

Ableitungsfunktion / Ableitung / erste Ableitung von f (an der Stelle x_0)

<u>Merke</u> $f'(x_0) = m_T$ an der Stelle x_0

$\hat{=}$ Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Mit neuer Rubrik „ ZUSCHAUERWÜNSCHE" direkt unter:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLnqFfKzlSF-zf7M5Ujcmfpp68CRn7qSW2

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de

Ableitung der Potenzfunktion

Es war $f(x)=x^2$ mit $f'(x)=2x^1$
und $f(x)=x^3$ mit $f'(x)=3x^2$

$\boxed{\text{VERDACHT}}$

$f(x)=x^n$ mit $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ $n>2$

Zum Beweis benutzt man folgende „Regelmäßigkeiten" des ~~Pascalsch~~ „binomischen Formeln:

$$(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$$
$$(x_0+h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$$
$$(x_0+h)^4 = x_0^4 + 4hx_0^3 + 6h^2x_0^2 + 4h^3x_0 + h^4$$
$$\vdots$$

Sei $f(x)=x^n$ $P_0(x_0|x_0^n)$. Dann gilt

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$\overset{!}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0^n}+n\cdot h\cdot x_0^{n-1}+\ldots\text{Rest}\cancel{-x_0^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n \cdot h \cdot x_0^{n-1} + \ldots \text{Rest}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[n \cdot x_0^{n-1} + \frac{\text{Rest}}{h} \right]$$

Für $n = 3, 4, \ldots$ besteht „der Rest" aus Summanden, die alle mindestens den Faktor „h^2" enthalten; das aber bedeutet, dass $\lim\limits_{h \to 0}$ „$\frac{\text{Rest}}{h}$" $= 0$ ist.

$$= \lim_{h \to 0} n \cdot x_0^{n-1} + \lim_{h \to 0} \frac{\text{Rest}}{h}$$

$$= n \cdot x_0^{n-1} + 0$$

$$= \underline{\underline{n \cdot x_0^{n-1}}}$$

Beispiel

$f(x) = x^3 \quad f'(x_0) = 3x_0^2$

$f(x) = x^4 \quad f'(x_0) = 4x_0^3$

$f(x) = x^{10} \quad f'(x_0) = 10 \cdot x_0^9$

Ausblick: Summen- und Faktorregel