Differentialrechnung 8

Summen- und Faktorregel
Aufgaben mit Lösungen

Beweise

Ist $f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

und sind $g(x)$ und $h(x)$ differenzierbar

dann ist

$$\boxed{f'(x) = a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x)}$$

Beweis

"$g(x)$ ist differenzierbar" bedeutet:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

"$h(x)$ ist differenzierbar" bedeutet:

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a\,g(x+h) + b\,h(x+h) - [a \cdot g(x) + b \cdot h(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot g(x+h) - a \cdot g(x) + b \cdot h(x+h) - b \cdot h(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\boxed{a} \cdot g(x+h) - \boxed{a} \cdot g(x)}{h} + \frac{\boxed{b} \cdot h(x+h) - \boxed{b} \cdot h(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\boxed{a \cdot} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \boxed{b \cdot} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \right]$$

$$\boxed{\overset{!}{=}} \boxed{\lim_{h \to 0} a \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}} + \boxed{\lim_{h \to 0} \boxed{b \cdot} \frac{h(x+h) - h(x)}{h}}$$

$$\boxed{\overset{!}{=}} \boxed{a \cdot} \boxed{\lim \frac{g(x+h) - g(x)}{h}} + \boxed{b \cdot} \boxed{\lim \frac{h(x+h) - h(x)}{h}}$$

$$= a \cdot \boxed{g'(x)} + b \cdot \boxed{h'(x)} = f'(x)$$

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Mit neuer Rubrik „ ZUSCHAUERWÜNSCHE“ direkt unter:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLnqFfKzlSF-zf7M5Ujcmfpp68CRn7qSW2

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de

Aufgaben

(1) Berechne die Steigung von f in den Achsenabschnittspunkten mit

X]

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

(2) Es sei $f_c(x) = \cancel{cf}\, x^2 - 4cx + 3c^2$

XX]

Berechne $c \in \mathbb{R}$ so, daß der Graph von f ~~an~~ in den Nullstellen Tangenten hat, die orthogonal zueinander sind.

(3) Sei $l_1(x) = x^2$ und $l_2(x) = x^3$, $l(x) = l_1(x) \cdot l_2(x)$

Zeige: Es gibt mindestens ein $x_0 \in \mathbb{R}$

XXX]

mit $\cancel{l}\; l'(x_0) \neq l_1'(x_0) \cdot l_2'(x_0)$

Welche Folgerung ergibt sich?

Übersicht meiner Latein/Altgriechischvideos auf:
https://www.youtube.com/user/NachhilfeLatein/playlists

Übersicht meiner Mathevideos auf:
https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists
Mit neuer Rubrik „ ZUSCHAUERWÜNSCHE“ direkt unter:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLnqFfKzlSF-zf7M5Ujcmfpp68CRn7qSW2

Schriftliche Unterlagen in pdf-Form zum kostenlosen Download unter:
www.raphael-biere.de