Aufgaben

① Es sei $f(x) = \frac{4}{x}$ und $g_t(x) = 3 - t^3x^2,\ t \in \mathbb{R}$

t ist so zu bestimmen, daß sich f und g „berühren".

② Gegeben sei $f(x) = x(2-x)(x-4)$.
Vom Ursprung aus soll eine Tangente an den Graphen von f gelegt werden.

③ Zeichne mithilfe eines Zeichenprogramms den Graphen zu $f(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{20}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ und f' in ein Koordinatensystem.
Untersuche Zusammenhänge zwischen f und f'.

Nachtrag Grafik $f(t,x) = tx^3 - tx^2 + 2t + 3t^2x$

Nachteil

$$\boxed{f_t(x) = x^2 + t\cdot x} \quad t \in \mathbb{R}$$

z.B $f_3(x) = x^2 + 3x$ oder $f_{-2}(x) = x^2 - 2x$

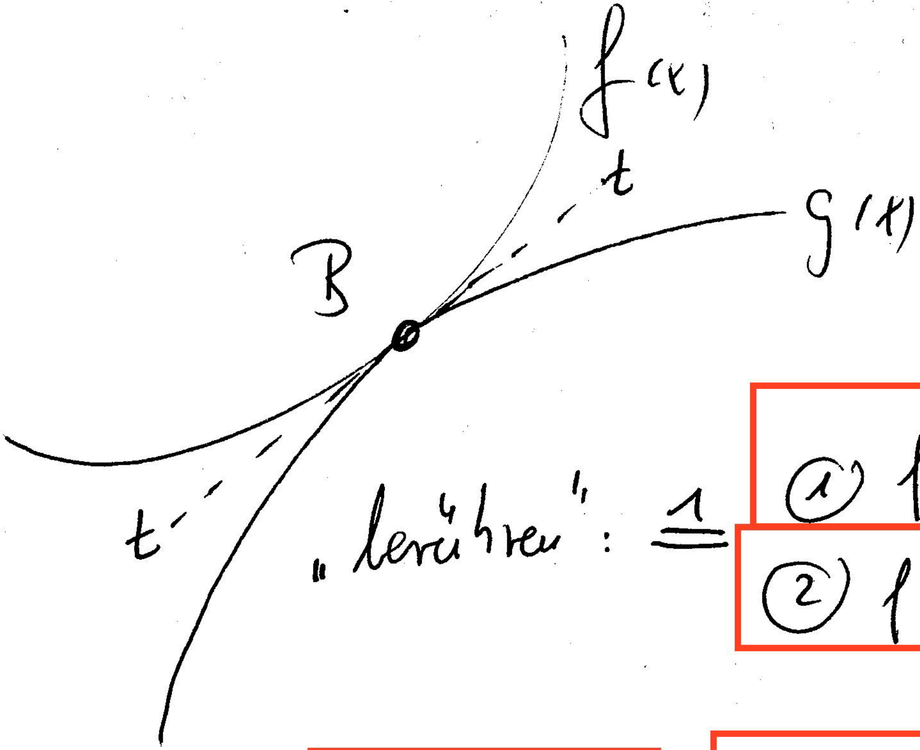
also

$$\boxed{f(t,x)} = x^2 + t\cdot x$$

bzw $f(y,x) = x^2 + y\cdot x$

oder $z(y,x) = x^2 + y\cdot x$

zu 1



„berühren": $\underline{\underline{1}}$ $\boxed{① \; f(x_B) = g(x_B)}$

$\boxed{② \; f'(x_B) = g'(x_B)}$

zu 1 $\boxed{\frac{4}{x}} \overset{?}{=} \boxed{3 - t^3 x^2}$ $\boxed{\text{für welches „}t\text{"?}}$

$$t^3 x^2 = 3 - \frac{4}{x} \qquad | : x^2 \neq 0$$

$$t^3 = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \qquad | \sqrt[3]{}$$

$$\boxed{t = \sqrt[3]{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}}}$$

zu 2 $\boxed{f'(x_B) = g'(x_B)} \Leftrightarrow -\frac{4}{x^2} \overset{?}{=} 0 - 2t^3 x \quad | \cdot x^2$ „nach x"

$$-4 = -2t^3 x^3 \qquad | : (-2t^3) \neq 0$$

$$x^3 = +\frac{2}{t^3}$$

Wir setzen „t^3" ein:

$$x^3 = +\frac{2}{\underbrace{\boxed{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}}}_{t^3}}$$

$\boxed{x_B \text{ kann berechnet werden}}$

$$x^3 = +\frac{2}{\boxed{\frac{3x-4}{x^3}}}$$

$$x^3 = +\frac{2x^3}{3x-4} \qquad \Big| : x^3 \neq 0$$

$$1 = +\frac{2}{3x-4} \qquad \Big| \cdot (3x-4)$$

$$3x - 4 = +2$$
$$3x = 6$$

$$\boxed{\underline{\underline{x_B = 2}}}$$

Damit ist

$$\boxed{t =} \sqrt[3]{\frac{3}{2^2} - \frac{4}{2^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3}{4} - \frac{4}{8}}$$

$$\boxed{= \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_B) &= f(2) = 2 \\ g(x_B) &= 3 - \tfrac{1}{4} \cdot 4 = 2 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} f'(x_B) &= -1 \\ g'(x_B) &= -1 \end{aligned}}$$

Nachweis

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{x}}$$

gesucht: $f'(x)$

$$f'(x) = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4 \cdot x - 4 \cdot (x+h)}{x \cdot (x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x - 4(x+h)}{x(x+h) \cdot h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x - 4x - 4h}{x(x+h) \cdot h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4\cancel{h}}{x \cdot (x+h) \cdot \cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x \cdot (x+h)}$$

$$\overset{!}{=} \frac{-4}{x(x+0)} = -\frac{4}{x^2} = f'(x)$$