Kurvendiskussion einer Betragsfunktion

$$f(x) = |x^3 - x|$$

Vorbemerkung

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich erst einmal:

$$f(x) = |x^3 - x| = \begin{cases} f_1(x) = x^3 - x & \text{falls } x^3 - x \geq 0 \\ f_2(x) = -(x^3 - x) = -x^3 + x & \text{falls } x^3 - x < 0 \end{cases}$$

385

~~Nul~~

Definitionsbereich

Da alle $x \in \mathbb{R}$ in den Fu-term eingesetzt werden können gilt

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Wertebereich

Wegen $f(x) = |x^3 - x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$D(f) = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Nullstellen

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow |x^3-x|=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)=0$$

$$\underline{\underline{x_1=0}} \vee x^2-1=0$$

$$x^2=1$$

$$\underline{\underline{x_2=+1 \quad x_3=-1}}$$

Symmetrie

$$f(x)=|x^3-x|$$

$$f(-x)=|(-x)^3-(-x)|$$

$$=|-x^3+x|$$

$$=|(-1)[x^3-x]|$$

$$\overset{!}{=}|x^3-x|$$

also $f(x)=f(-x)$: y-Achsensymmetrie

2

Extrema nur wo $f'(x)=0$

① Über den $| \ |$ darf nicht hineindiff. werden:

z.B. $f(x)=|x| \quad f'(x) \neq |1| = 1$

② Betragsfunktionen „können" an den Nullstellen „Knicke, nicht differenzierb." erzeugen

Wir betrachten daher

$f(x)=|x^3-x|$ mit GEOGEBRA

3✓

$$f(x) = |x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & \text{falls } x^3 - x \geq 0 \\ -(x^3 - x) & \text{falls } x^3 - x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \left[|x^3 - x| \right]' = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{falls } x^3 - x \geq 0 \\ -(3x^2 - 1) & \text{falls } x^3 - x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ | außer bei $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = +1$

$$\Longleftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

ebenso $-(3x^2 - 1) = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Wir untersuchen nun den Wert des Terms „$x^3 - x$" für $x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ bzw $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\underline{\underline{x = +\sqrt{\frac{1}{3}}}}$: $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 1\sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} < 0}}$

$\underline{\underline{x = -\sqrt{\frac{1}{3}}}}$: $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1\sqrt{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} > 0}}$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x^3 - x \geq 0 \\ -6x & x^3 - x < 0 \end{cases}$$

$$f''\left(+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) \overset{!}{=} -6 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}} < 0 \Rightarrow Max\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}} \,\middle|\, f\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right)$$

$$f''\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) \overset{!}{=} +6 \cdot \left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) < 0 \Rightarrow Max\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}} \,\middle|\, f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right)$$

Sonderuntersuchung an den nicht differenzierbare Stellen $x_1 = -1$; $x_2 = 0$, $x_3 = +1$

$f(-1)$: Wegen $x^3 - x \Leftrightarrow (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$ ist die 1. Gleichung zuständig

$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$

$f(0) = 0^3 - 0 = 0$

$f(+1) = 1^3 - 1 = 0$

Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ liegen an den ~~Stel~~ nicht differenzierbaren Stelle $x_1 = -1$ $x_2 = 0$ $x_3 = +1$ lokale Minima vor.

Wendestellen

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x^3 - x \geq 0 \\ -6x & x^3 - x < 0 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ die Stelle ist nicht differenzierbar

~~Es liegen keine Wendestellen vor.~~

Man sieht in der Grafik:

An der „Stelle $x_1 = -1$" springt (!) die Steigung von (links) negativ nach (rechts) positiv.

An der Stelle „$x_2 = 0$" „springt" (!) die Steigung von (links) auf (rechts) positiv, d.h. „der Bogen" ist rechtsgekrümmt.

An der Stelle „$x_3 = +1$" „springt" (!) die Steigung von (links) negativ auf (rechts) positiv.

Ausblick Aufstellen von Funktionsgleichungen

6