Ableitung von $f(x) = x^{-n}$; $n \in \mathbb{N}$

389

<u>Wiederholung</u> $f(x) = x^{-n}$

Schaubilder mit Geogebra

<u>Die wichtigsten Eigenschaften</u>

→ $f(x) = x^{-n}$ ist bei <u>geraden Exponenten</u> y-achsen=symmetrisch

→ $f(x) = x^{-n}$ ist bei <u>ungeraden Exponenten</u> nullpunktsymmetrisch

→ $f(x) = x^{-n}$ hat bei <u>$x = 0$ eine Definitionslücke</u>

→ Die y-Achse [Gleichung: $x = 0$] ist <u>Asymptote</u>

→ Der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ ist

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^{-n} = 0$$

Um die Ableitung $f'(x_0)$ mit $x_0 \neq 0$ zu bestimmen, formt man zuerst den Differenzenquotienten $m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ein wenig um:

$$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0}$$

$$= \frac{\frac{x_0^n - x^n}{x^n \cdot x_0^n}}{x - x_0} \Leftarrow$$ gleichnamig und auf einen Bruchstrich

$$= \frac{x_0^n - x^n}{x^n \cdot x_0^n \cdot (x - x_0)}$$ ein Bruchstrich

$$= \frac{1}{x^n \cdot x_0^n} \cdot \frac{x_0^n - x^n}{x - x_0}$$

$$= -\frac{1}{x^n \cdot x_0^n} \cdot \frac{+x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

2

Wir bilden nun den Differentialquotienten $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} m_{sec}$

$$\boxed{f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} m_{sec}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[-\frac{1}{x^n \cdot x_0^n} \cdot \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \right]$$

$$\overset{!}{=} -\frac{1}{x_0^n \cdot x_0^n} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \quad \text{„Rechenregel für } \underline{\text{limes}}\text{"}$$

$$= -\frac{1}{x_0^{2n}} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}}$$

[Wir wissen $h(x) = x^n$ ~~$h'(x) = n \cdot$~~

$m_{sec} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$ und $h'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$

$= n \cdot x_0^{n-1}$]

$$= -\frac{1}{x_0^{2n}} \cdot \boxed{n \cdot x_0^{n-1}} = -n \cdot x_0^{n-1-2n}$$

$$= -n \cdot x_0^{-n-1}$$

Aufgaben

(1) Zeichne und rechne

$f(x)=x^n$ und $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$ schneiden sich stets.

(2) Betrachte $f(x)=\frac{1}{x}$ und $g(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$.
Gemeinsamkeiten? Unterschiede?
Berechne $g'(x)$

www.raphael-brice.de