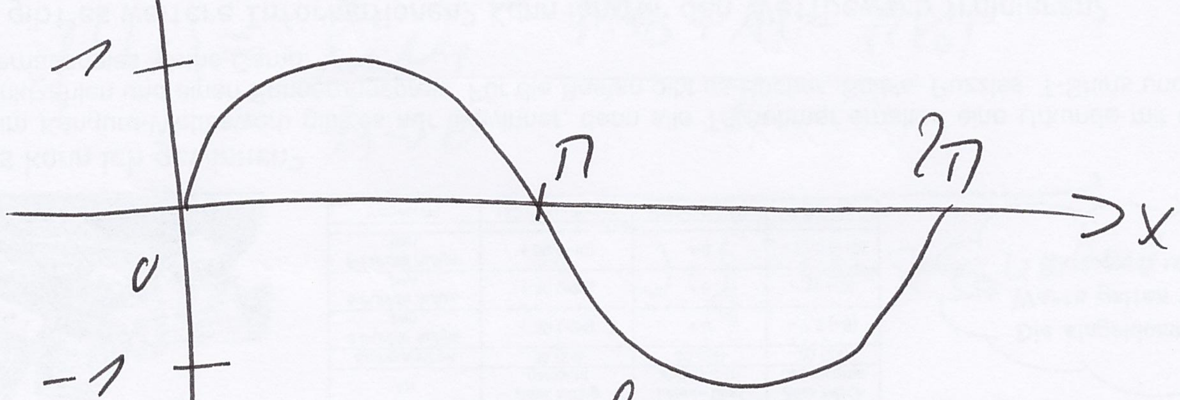
Die Ableitung der sin-Funktion + Aufgaben (391)



$f(x) = \sin(x)$

Wichtige Eigenschaften

→ Umrechnung Gradmaß ⇔ Bogenmaß

$$\boxed{\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}}$$

$\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$ oder $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$

→ $f(x+2\pi) = f(x)$ „periodisch mit der Periode 2π"

→ $\pm 1\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Nullstellen von $f(x)$

→ $f(x) \leq 1$ für alle x / $f(x) \geq -1$ für alle x

Geogebra: $\sin(x)$ und $\cos(x)$

Wir leiten $f(x) = \sin x$ ab, benutzen dabei die sog. „h-Methode“:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Differenzenquotient } m_{sec}}$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h}$$

Um den Zähler „zu vereinfachen(!)“, benutzt man folgende Beziehung zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Wir sehen: $\alpha = x_0 + h$
$\beta = x_0$

$$= \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{h}$$

$$= \cancel{\frac{2 \cdot \cos(x_0+h+x_0) \cdot \sin(x_0+h-x_0)}{h}}$$

$$= \cancel{\frac{\cos(2x_0+h) \cdot \sin(h)}{\frac{h}{2}}}$$

$$\frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{h}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x_0 + h + x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_0 + h - x_0}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{2x_0 + h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir $\lim\limits_{h \to 0}$ an:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos(x_0)$

2. Mithilfe eines TR's untersuchen wir

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{\text{für } h \to 0} 1$$

Wir übersehen an dieser Stelle „geschickt", daß wir den „lim" auf ein Produkt angewandt haben und stillschweigend benutzt haben

$$\lim(T_1 \cdot T_2) = \lim T_1 \cdot \lim T_2$$

und erhalten insgesamt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \cos(x_0)$$

Völlig analog läßt sich zeigen

$$g(x) = \cos(x) \quad g'(x) = -\sin(x) \quad (!)$$

Aufgabe 1 $f(x) = x + \sin(x)$

$g(x) = x + \cos(x)$

Zeichne mit Geogebra und beweise rechnerisch, daß die Graphen beider Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend sind.

Aufgabe 2 Unter welchem Winkel schneiden sich $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ auf $[0; \pi]$?

www.raphael-bisve.de