Die Kettenregel 394 nachprüft

Um eine Funktion der Form $f(x) = u(v(x))$ abzuleiten, benötigt man

1) $v'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$

2) $u'(v(x_0)) = \lim\limits_{v(x) \to v(x_0)} \dfrac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)}$

Wir betrachten zuerst den Differenzenquotient

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0} = \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{\cancel{v(x) - v(x_0)}} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Wir „berechnen" nun $\lim\limits_{x \to x_0} m_{sec}$:

$$(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x \to x_0}$$

$$\overset{!}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x \to x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)}$$

$$= \underbrace{v'(x_0)}_{\text{„innere" Ableitung}} \cdot \underbrace{u'(v(x_0))}_{\text{„äußere" Ableitung}}$$

Beispiel

$$f(x) = \sqrt{7x^2 - 9x}$$

$$= (7x^2 - 9x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \underbrace{(14x - 9)}_{\text{innere Abl}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(7x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Able}}$$

ale Beispiele

$$f_1(x) = \sin(x^2 - 9x + 8)$$

$$f_1'(x) = \underbrace{(2x-9)}_{\text{innere A.}} \cdot \underbrace{\cos(x^2-9x+8)}_{\text{äuß. Abl}}$$

$$f_2(x) = (\sin x + 4x)^{-9}$$

$$= (\cos x + 4) \cdot (-9)(\sin x + 4x)^{-10}$$

$$f_3(x) = \sqrt{\sin(x^2-3x)}$$

$$\overset{!}{=} \left(\sin(x^2-3x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_3'(x) = \left[\sin(x^2-3x)\right]' \cdot \frac{1}{2}\left(\sin(x^2-3x)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\left[(2x-3) \cdot \cos(x^2-3x)\right]} \cdot \frac{1}{2}\left(\sin(x^2-3x)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

www.raphael-biere.de