Die Produktregel (395)

„Im Prinzip" funktioniert der Beweis der Produktregel – $\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x)}$ – wie der Beweis der Kettenregel.

Man braucht

$$u'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x \to x_0}$$

$$v'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

Man betrachtet wieder den Differenzenquotienten m_{sec} und formt ihn „geschickt" um:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

Trick

$$\overset{!}{=} \frac{u(x) \cdot v(x) \overbrace{- u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x)}^{=0, \text{ und eingefügt}} - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\boxed{u(x) - u(x_0)} \cdot v(x) + u(x_0) \cdot \boxed{v(x) - v(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \cdot u(x_0)$$

Nun holen wir den „$\lim\limits_{x \to x_0}$" dazu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} m_{sec}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x)} + \underbrace{\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \cdot u(x_0)} \right]$$

$$= u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$$

Beispiel

$$f_1(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$$

$u(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = \sin x$

$v'(x) = \cos x$

$$f_1'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

$$f_2(x) = \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2 - 3x}}_{v}$$

$u = \cos x \quad u' = -\sin x$

$v = (x^2 - 3x)^{1/2} \quad v' = (2x - 3) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_2'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$= -\sin(x) \cdot \sqrt{x^2 - 3x} + \cos x \cdot (2x - 3) \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$$

www.raphael-lieeve.ch

Die Quotientenregel (39c)

Aus "Arbeitsersparnisgründen" greift man zur Herleitung der ~~Ketten~~ Quotientenregel — $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ — zu folgendem Kunstgriff

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$$

und benutzt nun die schon bewiesenen Produkt- und Kettenregel:

$$f(x) = u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot [v(x)]^{-1} + u(x) \cdot \underbrace{(-1) \cdot [v(x)]^{-2}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}$$

$$= \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\overset{!}{=} \frac{u'(x) \cdot v(x)}{v(x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (1)$$

Beispiel

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^2-3x}$$

$$u(x)=\sin(x) \qquad u'(x)=\cos x$$
$$v(x)=x^2-3x \qquad v'(x)=2x-3$$

$$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$=\frac{(\cos x)\cdot(2x^2-3x)-(\sin(x))\cdot(2x-3)}{[x^2-3x]^2}$$

NIEMALS den Nenner ausrechnen!

2. Beispiel

$$g(x)=\frac{2x-1}{4x+2}$$

$$u(x)=2x-1 \qquad u'(x)=2$$
$$v(x)=4x+2 \qquad v'(x)=4$$

$$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$=\frac{2\cdot(4x+2)-(2x-1)\cdot 4}{[4x+2]^2}$$

$$\overset{!}{=}\frac{\cancel{8x}+4-\cancel{8x}+4}{[4x+2]^2}=\frac{4}{[4x+2]^2}$$

NIEMALS DEN Nenner