Aufgaben zur Quotientenregel

397

1. Gib f' an

   a. $f(x) = \frac{3a}{x^2-2}$ b. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$

2. $f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$

   a. Berechne den Wendepunkt
   b. Berechne die Gleichung der Wendetangente
   c. Die Parallelen (!) zur Wendetangente aus b berühren den Graphen von f.

3. Für welche $m \in \mathbb{R}$ hat $f_m(x) = \frac{mx^2-(m+2)x+2}{2x-5}$ keine Punkte mit waagrechter Tangente?

Lösungen zu 397

(1a) $f(x) = \frac{3a}{x^2-2}$

$u = 3a \quad u' = 0$

$v = x^2-2 \quad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0\cdot(x^2-2) - 3a\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{-6ax}{[x^2-2]^2}$$

(1b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \stackrel{!}{=} \frac{x}{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}$

$u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$v(x) = (1+2x)^{\frac{1}{2}} \quad v'(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innere A}}}{2} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere A.}}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+2x)^{\frac{1}{2}} - x\cdot \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{\left[(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{1+2x} - \frac{x}{\sqrt{1+2x}}}{1+2x}$$

Doppelbruch!

$$\overset{!}{\neq} \frac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}} - \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$$

$$= \frac{\qquad\qquad}{1+2x}$$

$$= \frac{1+2x-x}{(1+2x)\sqrt{1+2x}}$$

$$= \frac{1+x}{(1+2x)\sqrt{1+2x}}$$ Sieht besser aus!

12

$$f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$$

a) notw. Bed. f. WP'en $f''(x) = 0$

$$f(x) = \frac{4x}{x^2-4}$$

$u = 4x \quad u' = 4$

$v = x^2-4 \quad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2-4) - 4x \cdot 2x}{[x^2-4]^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{4x^2 - 16 - 8x^2}{[x^2-4]^2} = \frac{-16-4x^2}{[x^2-4]^2} \quad \cancel{\stackrel{!}{=} \frac{-4(x^2+4)}{[x^2-4]^2}}$$

$$\cancel{\stackrel{!}{=} \frac{-4}{x^2-4}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}$$

$$u = -4x^2 - 16 \qquad u' = -8x$$

$$v = (x^2-4)^2 \qquad v' = 2x \cdot 2(x^2-4)^1$$

$$f''(x) = \frac{-8x \cdot (x^2-4)^2 - (-4x^2-16) \cdot 2x \cdot 2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{-8x \cdot (x^2-4)^1 + (4x^2+16) \cdot 2x \cdot 2 \cdot 1}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{-8x^3 + 32x + 16x^3 + 64x}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff 8x^3 + 96x = 0 \iff x = 0$$

$$\iff x\underbrace{(8x^2+96)}_{\neq 0} = 0$$

Wir verzichten dankend auf den Nachweis $f'''(0) \neq 0$ und sehen fest

$W(0|0)$ ist Wendepunkt!

(2b) Berechnung der Wendetangente

$y = mx + n$

$m = f'(0) = \frac{-4 \cdot 0^2 - 16}{(0^2-4)^2} = -1$

$P(0|0)$

$y = -1 \cdot x + n$

$0 = -1 \cdot 0 + n \rightarrow n = 0$

$\underline{y = -x}$ ist Wendetangente

(2c) Die Parallelen zur Wendetangente sind

$$y = -x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sie „berühren“ f, d.h.

wo ist $f'(x) = -1 \quad \left[\begin{matrix} y = -x + c \\ y' = -1 \end{matrix}\right]$

$$\frac{-4x^2-16}{[x^2-4]^2} \overset{?}{=} -1 \qquad \Big| \cdot (x^2-4)^2$$

$$-4x^2-16 = -(x^2-4)^2$$

$$-4x^2-16 = -x^4+8x^2-16 \qquad \Big| \begin{matrix} +16 \\ +x^4 \\ -8x^2 \end{matrix}$$

$$x^4 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-12) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 = +\sqrt{12} \\ x_3 = -\sqrt{12} \end{matrix}\right\} \text{sind „Berührstelle“}$$

$$B_1\left(+\sqrt{12} \,\middle|\, \frac{4\cdot\sqrt{12}}{12-4}\right) = \underline{\left(\sqrt{12} \,\middle|\, \frac{1}{2}\sqrt{12}\right)}$$

$$B_2\left(-\sqrt{12} \,\middle|\, \frac{4\cdot(-\sqrt{12})}{8}\right) = \left(-\sqrt{12} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\sqrt{12}\right)$$

6

Zu 3) $f(x)=\frac{mx^2-(m+2)x+2}{2x-5}$

soll <u>keine</u> waagerechten Tangenten haben: $f'(x)\neq 0$!!

Wir untersuchen $f'(x)=0$!

$u=mx^2-(m+2)x+2$

$u'=2mx-m-2$

$v=2x-5 \quad v'=2$

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(2mx-m-2)\cdot(2x-5)-\left[mx^2-(m+2)x+2\right]\cdot 2}{(2x-5)^2}$$

Wann ist der Zähler $\equiv 0$?

$$4mx^2-10mx\cancel{-2mx}+5m\cancel{-4x}+\cancel{10}\cancel{-2mx^2}+(m+2)\cdot 2x\cancel{-4}\stackrel{?}{=}0$$

$$2mx^2-12mx+5m\cancel{-4x}+6\cancel{+2mx}\cancel{+4x}\stackrel{?}{=}0$$

$$2mx^2-10mx+11=0 \quad |:2m\neq 0$$

$$x^2-5x+\frac{11}{2m}=0$$

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{11}{2m}}$$

Wenn $\frac{25}{4}-\frac{11}{2m}<0$ ist, dann gibt es <u>keine</u> Lösungen zu $f'(x)=0$, d.h. keine Stellen mit waagerechter Tangente usatz $\frac{25}{4} - \frac{11}{2m} < 0$ kann natürlich nach m hin aufgelöst werden.

1. Fall Sei $m > 0$

$$\frac{25}{4} - \frac{11}{2m} < 0 \quad | \cdot 2m$$

$$\frac{25}{2}m - 11 < 0$$

$$\frac{25}{2}m < 11 \qquad m < \frac{22}{25}$$

2. Fall Sei $m < 0$

$$\frac{25}{4} - \frac{11}{2m} < 0 \quad | \cdot 2m < 0!$$

$$\frac{25}{2}m - 11 \overset{!!!}{>} 0$$

$$\frac{25}{2}m > 11$$

$$m > \frac{22}{25}$$