Exemplarische Kurvendiskussion mit e^x · 4/11

Gegeben sei $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(2-2x)$

(a) Zeichne mit Geogebra ✓

(b) Nullstellen und Symmetrie ✓

(c) Maxima, Minima, Wendepunkte und Sattelpunkt ✓

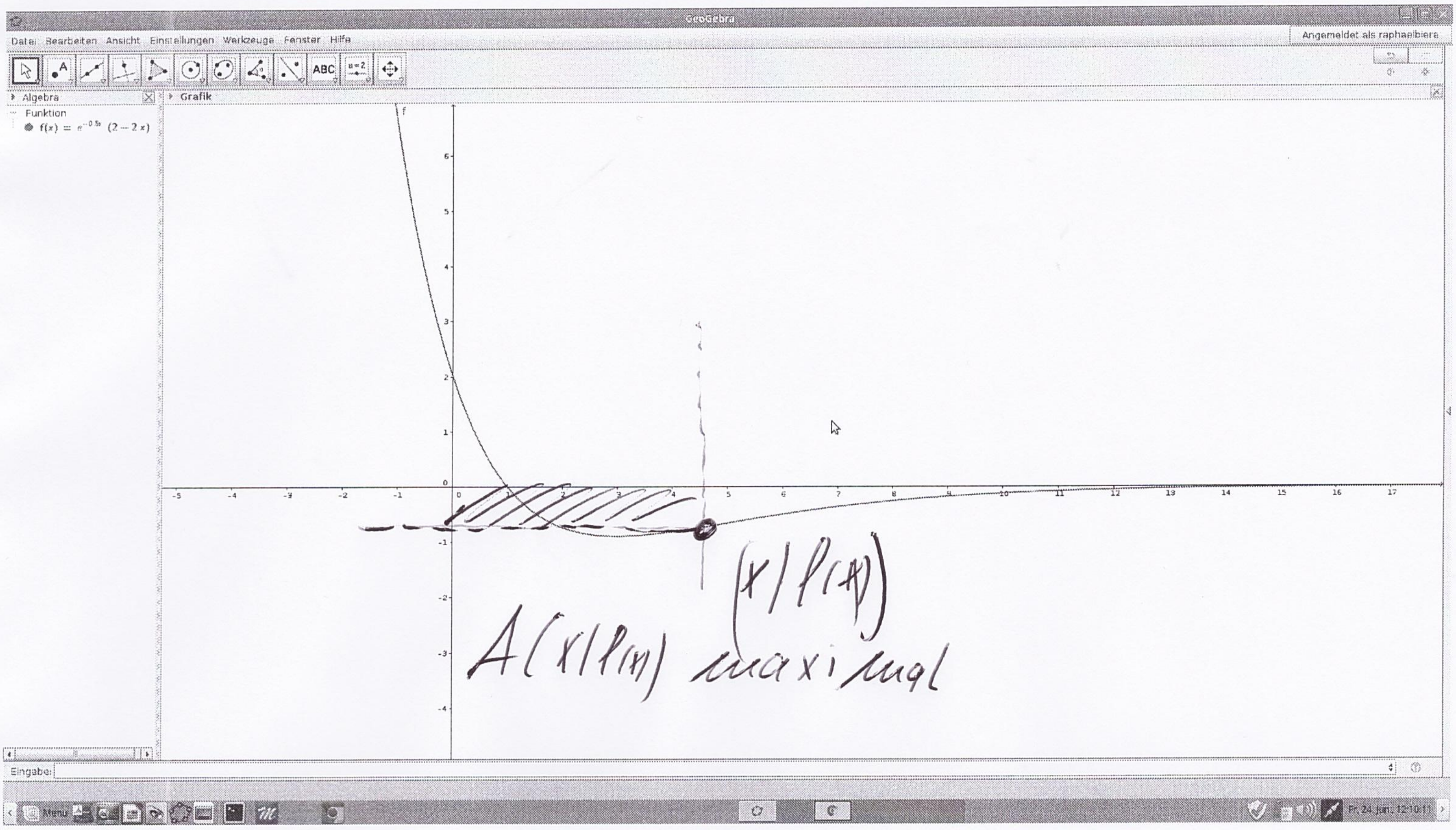
(d) Grenzwerte ✓

(e) Bestimme mithilfe von (c) und (d) den W(f)

(f) Bestimme die Gleichung der Wendetangente. Wie groß ist der Flächeninhalt des Δ's, das die Wt und die Koo-achsen bilden?

(g) Zeichnung: Berechne den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks!

www.raphael-beier.de


GeoGebra
Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe
Angemeldet als raphaelbiera
Algebra
Grafik
Funktion
f(x) = e^{-0.5x} (2 − 2 x)
(x | f(x))
A(x | f(x)) maximal
Eingabe:

zu a] Zeichnung

zu b] $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} \cdot (2-2x) = 0$

$\Longleftrightarrow 2 - 2x = 0$

$\underline{\underline{x = 1}}$

$f(-x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot(-x)} \cdot (2 - 2\cdot(-x))$

$= e^{\frac{1}{2}x}(2+2x)$

$-f(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}(2-2x)$

keine Symmetrie

$\boxed{24c}$ Wir benötigen $f'(x), f''(x), f'''(x)$

$$f(x) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{u} \cdot \underbrace{(2-2x)}_{v}$$

[Produktregel]

$$u' = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\substack{\text{innere} \\ \uparrow}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\substack{\text{äußere} \\ \uparrow}} \qquad v' = -2$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) \cdot (2-2x) + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-2)$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[-\frac{1}{2}(2-2x) + (-2)\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[-1 + x - 2\right]$$

$$\underline{\underline{= \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{u} \cdot \underbrace{[x-3]}_{v}}} \quad \checkmark$$

mit $u' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad v' = 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x-3) + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot 1$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot (x-3) + 1 \right]$$

beliebte Rechenfehler!

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 1 \right]$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{u} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right]}_{v} \checkmark$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\overset{!}{=} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left[\frac{1}{4}x - \frac{7}{4} \right] \checkmark$$

notw. Bed. für Extrema

$$f'(x) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} \cdot \left[x-3\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{x = 3}$$

hinr. Bed für Extrema

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f''(3) = \underbrace{\quad^{-\frac{1}{2}\cdot 3}}_{>0} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{5}{2}\right]}_{>0}$$

$$> 0$$

$\underline{(3|f(3))}$ ist Punkt

von Maximum

notw. Bed. f. Wendestelle

$$f''(x)=0 \iff \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} \cdot \left[-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right]=0$$

$$\iff -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=0$$

$$\underline{\underline{x=5}}$$

hinr. Bed. f. Wendestelle

$$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$$

$$f'''(5)=\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\cdot 5}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{4}\cdot 5-\frac{7}{4}\right]}_{\neq 0} \neq 0$$

$(5 | f(5))$ Wendst.

keine Sattelstelle: $f'(5)\neq 0$ s.o.

d) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(2-2x)$ mit $D(f) = \mathbb{R}$

also:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(2-2x)}_{\to -\infty}$

aber die „e-Funktion" „besiegt" $(2-2x)$,

also $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

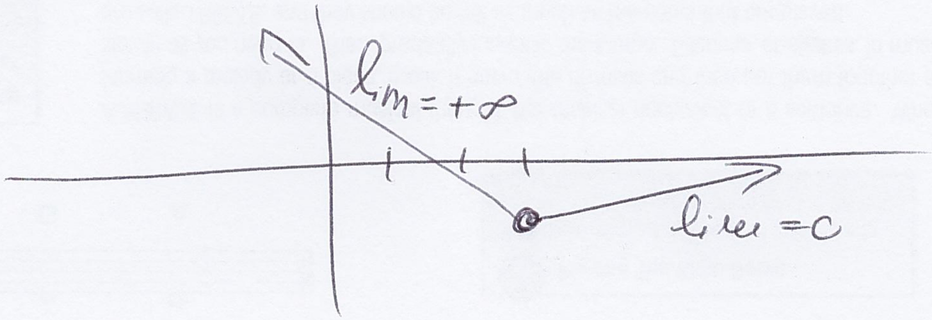
Alternativen → Graph
→ Wertetabelle $x = 100/1000/$usw
→ Regeln von de l'Hospital
Video Nr.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\to \infty} \cdot \underbrace{(2-2x)}_{\to +\infty}$

also wie oben

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

24e Das Minimum $(3|f(3)) = (3|-0{,}83)$ muß daher zu absolutes Minimum sein



24f Wendetangente

Wendepunkt ist $W(5|f(5))$

$= W(5|-0.66)$

WT: $y = mx + n$ mit $m = f'(5)$

$f'(5) \stackrel{TR}{=} 0.16$

WT: $y = 0{,}16 \cdot x + n \quad (5|-0{,}66)$

$-0{,}66 = 0{,}16 \cdot 5 + n$

$n = -0{,}66 - 0{,}8 = -1{,}46$

WT: $y = 0{,}16 \cdot x - 1{,}46$ ✓

A_Δ : siehe Zeichnung

Das Δ ist rechtwinklig:

„Seite a" von (0|0) $\rightarrow$ $\underbrace{\text{Schnitt Gerade / y-Achse}}$

$\hat{=}\; 1{,}46$

y-Achsenabschnitt

„Seite b" von (0|0) $\rightarrow$ $\underbrace{\text{Schnitt Gerade / x-Achse}}$

$$y = 0{,}16x - 1{,}46 = 0$$

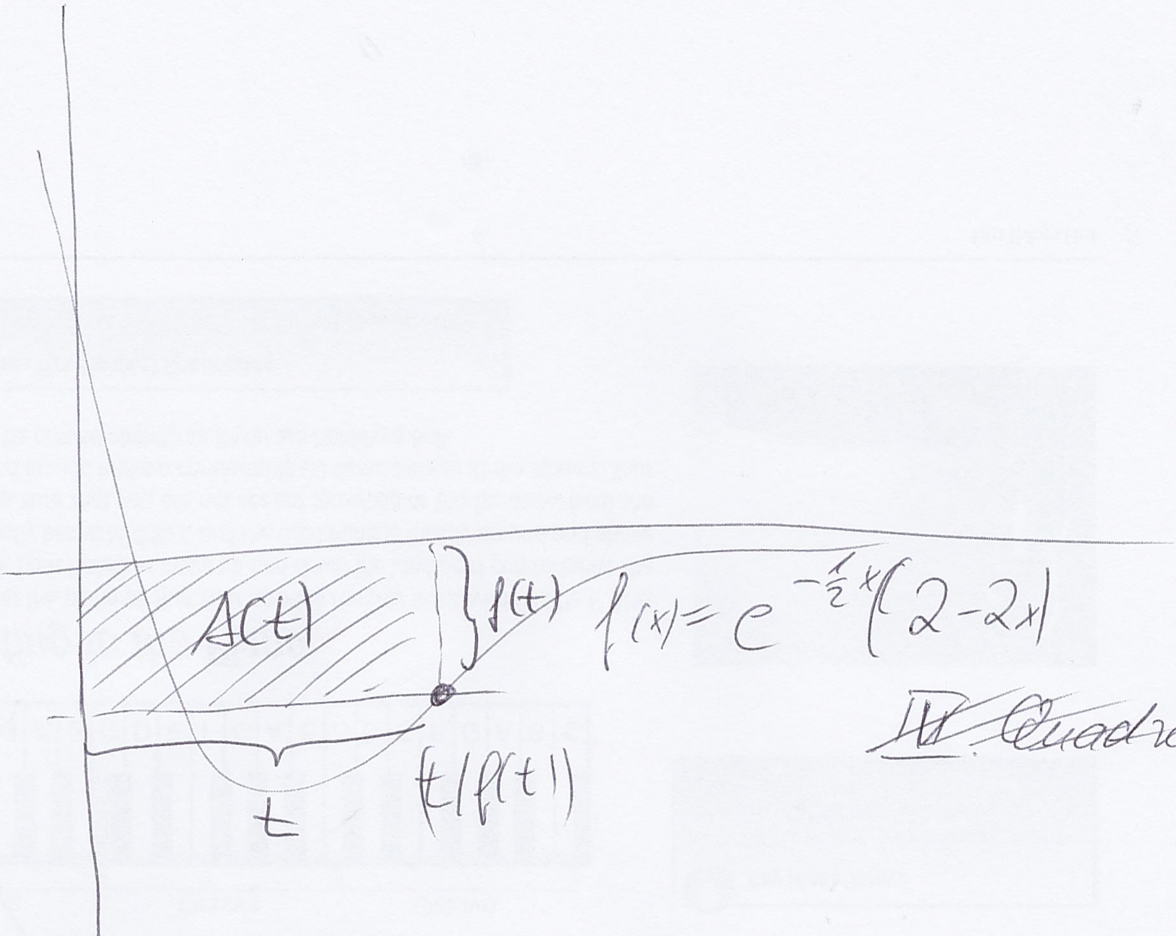
$$\Leftrightarrow 0{,}16x = 1{,}46$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1{,}46}{0{,}16} \approx 9{,}125$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}46 \cdot 9{,}125$$

$$\approx 6{,}66 \quad \text{FEen}$$

9



$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(2-2x)$

IV. Quadrant

Extremalaufgaben [s. meine Playlists]

1) Was soll maximal werden

$$A(t) = t \cdot [-f(t)]$$ weil $f(t)$ negativ ist

$$= -t \cdot e^{-\frac{1}{2}t}(2-2t)$$

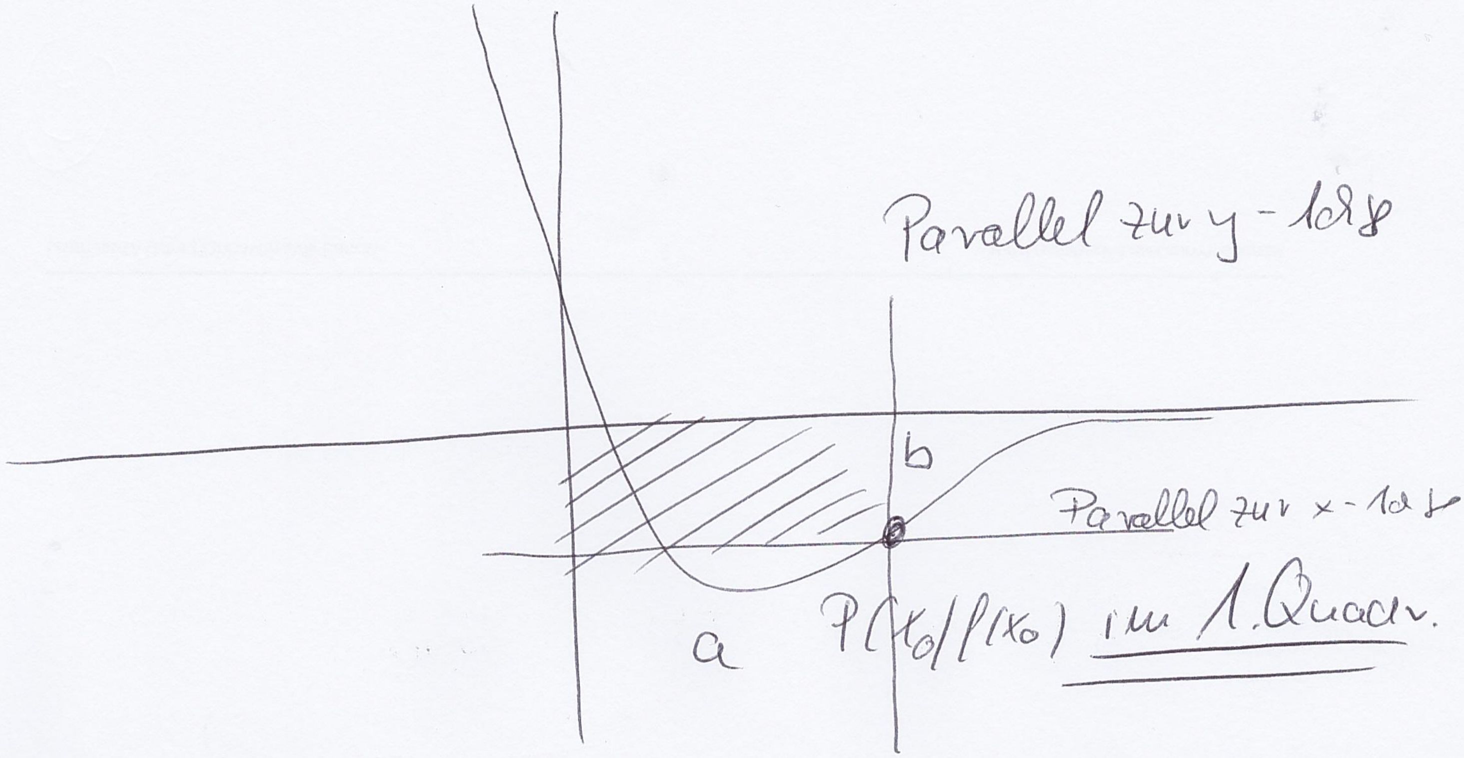
$$= \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}}_{u} \cdot \underbrace{(2t^2-2t)}_{v}$$

2) $$A'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cdot (2t^2-2t) + e^{-\frac{1}{2}t} \cdot (4t-2)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left[-\frac{1}{2}(2t^2-2t) + (4t-2)\right]$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t} \cdot [-t^2 + t + 4t - 2)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t} \cdot [-t^2 + 5t - 2] \overset{!}{=} 0$$



$A_{▨}$ soll maximal sein!

[Extremalaufgaben Videos Nr]

$$A_{\square} = a \cdot b$$

$$= x_0 \cdot f(x_0) \quad \text{und } (x_0 | f(x_0)) \text{ im 1. Quadranten}$$

$$= x_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}x_0} \cdot (2 - 2x_0)$$

$$\stackrel{!}{=} * \ \boxed{e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (2x - 2x^2) = A(x)}$$

gesucht Maximum!

$$t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$t_1 = 2{,}5 + \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 2{,}5 + 2{,}06 = \underline{\underline{4{,}56}}$$

$$t_2 = 2{,}5 - \sqrt{\frac{17}{4}} \approx 2{,}5 - 2{,}06 = 0.44$$