I

Exemplarische Kurvendiskussion mit Parameter und e^x

$$f_a(x) = (2x+3a)e^{x+1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

$D(f_a) = \mathbb{R}$; alle reellen Zahlen sind für x „erlaubt"

Nullstellen

$$f_a(x) = 0 \iff (2x+3a)e^{x+1} = 0 \quad \Big| : e^{x+1} \neq 0$$

$$2x + 3a = 0$$

$$\underline{\underline{x = -\tfrac{3}{2}a}}$$

Symmetrie

$$f_a(x) = (2x+3a)e^{x+1}$$

$$f_a(-x) = (-2x+3a)e^{1-x}$$

$$-f_a(x) = -(2x+3a)e^{x+1} = (-2x-3a)e^{x+1}$$

keine „bekannte" Symmetrie

Maxima/Minima

notw. Bed $f'(x)=0$

$$f_a(x) = \underbrace{(2x+3a)}_{u} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v}$$

$$u' = 2$$

$$v' = 1 \cdot e^{x+1} = e^{x+1}$$

$$f_a'(x) = \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v} + \underbrace{(2x+3a)}_{u} \cdot \underbrace{e^{x+1}}_{v'}$$

$$= e^{x+1} \cdot \left[2 + 2x + 3a \right]$$

$$f_a'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2 + 2x + 3a = 0 \quad | \; e^{x+1} \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{3}{2}a - 1}}$$

Minv. Bed. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = \underbrace{e^{x+1}}_{u} \cdot \underbrace{\left[2 + 2x + 3a\right]}_{v}$$

$$u' = e^{x+1}$$

$$v' = 2$$

$$f''(x) = \underbrace{e^{x+1}}_{u'} \cdot \underbrace{(2 + 2x + 3a)}_{v} + \underbrace{e^{x+1}}_{u} \cdot \underbrace{2}_{v'}$$

$$= e^{x+1} \cdot \left[2 + 2x + 3a + 2\right]$$

$$= e^{x+1} \cdot \left[4 + 2x + 3a\right]$$

$$f''\left(-\tfrac{3}{2}a - 1\right) = e^{-\frac{3}{2}a - 1 + 1} \cdot \left[4 + 2\left(-\tfrac{3}{2}a - 1\right) + 3a\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}a} \cdot \left[4 - 3a - 2 + 3a\right]$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{3}{2}a}}_{>0} \cdot \underbrace{\left[2\right]}_{>0} > 0 \quad \text{Min}\left(-\tfrac{3}{2}a - 1 \,/\, f(-\ldots)\right)$$

Wendepunkt

not Bed $f''(x)=0$

$\Longleftrightarrow 4+2x+3a=0$

$\underline{\underline{x=-2-\frac{3}{2}a}}$

normalerweise verzichtet man an dieser Stelle auf das Nachprüfen von $f'''(x)\neq 0$; ich mach es trotzdem wo

$f''(x)=\underbrace{e^{x+1}}_{u}\cdot\underbrace{[4+2x+3a]}_{v}$

$u'=e^{x+1}\qquad v'=2$

$f'''(x)=\underbrace{e^{x+1}}_{u'}\cdot\underbrace{[4+2x+3a]}_{v}+\underbrace{e^{x+1}}_{u}\cdot\underbrace{[2]}_{v'}$

$=e^{x+1}\left[6+2x+3a\right]$

$f'''(-2-\frac{3}{2}a)=\underbrace{e^{-2-\frac{3}{2}a+1}}_{>0}\cdot\left[6\underbrace{-4-3a}_{2\cdot(-2-\frac{3}{2}a)}+3a\right]\neq 0$

$W\left(-2-\frac{3}{2}a \,\middle|\, f_a\left(-2-\frac{3}{2}a\right)\right)$

Auf welchem Graphen liegen die Extrema?

Es war $f_a'(x) = \underbrace{\boxed{e^{x+1}\cdot\left[2+2x+3a\right] \overset{!}{=} 0}}_{\text{Wir lösen nach } a \text{ hin auf!!}}$

$$e^{x+1}\cdot\left[2+2x+3a\right]=0 \quad \left|\, : e^{x+1} \neq 0\right.$$

$$\underline{2+2x+3a=0} \quad \left|\, -2-2x\right.$$

$$3a = -2-2x \quad \left|\, :3\right.$$

$$\boxed{a = -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x}$$

und setzen das in $\boxed{f_a(x)}$ ein:

$$f_{a=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x}(x) = e^{x+1}\cdot\left[2x+3\cdot\underline{\left(-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x\right)}\right]$$

$$= e^{x+1}\left[2x-2-2x\right]$$

$$= \underline{e^{x+1}\cdot(-2)} = \underline{-2\cdot e^{x+1}}$$

Auf dem Graphen

$f_{Extrema}(x) = -2 \cdot e^{x+1}$ liegen alle

Extrema von $f_a(x)$

Veranschaulichung mit Geogebra

Wo liegen alle Wendepunkte von $f_a(x)$?

Es war $f_a''(x) = \underbrace{e^{x+1} \cdot [4+2x+3a] \stackrel{?}{=} 0}$

Wir lösen nach „a" auf

$$e^{x+1} \cdot [4+2x+3a] = 0 \quad | : e^{x+1} \neq 0$$

$$4+2x+3a = 0 \quad | -4-2x$$

$$3a = -4-2x \quad | : 3$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x}}$$

und setzen in $f_a(x)$ ein

$$f_{a=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x}(x) = e^{x+1} \cdot \left[2x + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right)\right]$$

$$= e^{x+1} \cdot [2x - 4 - 2x]$$

$$= -4e^{x+1}$$

Alle Wendepunkte liegen auf dem Graphen $f_{WP}(x) = -4e^{x+1}$

Weiterführende Parameterkurvendiskussionen: suche meine Playlists