Kurvenschar mit ln x

Untersuchung von $f_t(x) = tx - x\ln x$ $\quad t>0$, $x>0$

① Ableitungen f_t' und f_t''

$$f_t'(x) = t - \Big[\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v} + \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{v'}\Big]$$ mit

$u = x$
$u' = 1$
$v = \ln x$
$v' = \frac{1}{x}$
und
$(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$

$$= t - [\ln x + 1]$$

$$= -\ln x + t - 1$$

$$f_t''(x) = -\frac{1}{x} + 0$$

$$= -\frac{1}{x}$$ [kein Parameter mehr!!]

② Nullstellen

$$f_t(x)=0 \iff tx - x\ln x = 0$$

$$\iff x[t-\ln x]=0 \quad x_1=0 \text{ nicht erlaubt wg } x>0$$

$$t-\ln x = 0 \quad | + \ln x$$

$$\ln x = t \quad | \; e^{()}$$

$$e^{\ln x} = e^t$$

$$\underline{\underline{x = e^t}} \text{ ist Nullstelle}(t)$$

3) Extrema

notw. Bed $f_t'(x)=0$

$\Leftrightarrow -\ln x + t - 1 = 0 \quad | \ln x$

$\Leftrightarrow \ln x = t-1 \quad | e^{()}$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{t-1}$

$\Leftrightarrow x = e^{t-1}$

hinr. Bed $f_t'(x)=0 \wedge f_t''(x) \neq 0$

Es war $f_t''(x) = -\frac{1}{x}$

$f_t''(e^{t-1}) = -\frac{1}{e^{t-1}} < 0$ also Max $(e^{t-1} | f_t(e^{t-1}))$

(4) Wendestellen

notw. Bed $f_t''(x)=0$

$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x}=0$ ↯

Es gibt keine Wendestellen

(5) Graphische Darstellung der Schar

mit Geogebra

6 Geometrische Ort aller Extrema

Es war $f_t'(x) = \underbrace{-\ln x + t - 1 = 0}_{\text{Auflösen nach t:}}$

$$-\ln x + t - 1 = 0 \mid +\ln x + 1$$

$$\underbrace{t = 1 + \ln x}_{\text{Einsetzen in } f_t(x)\text{:}}$$

$$f_{t=1+\ln x}(x) = t \cdot x - x \cdot \ln x$$

$$= [1+\ln x] \cdot x - x \cdot \ln x$$

$$= x + x \cdot \ln x - x \cdot \ln x$$

$$= x$$

alle Extrema liegen auf $f_{t=1+\ln x}(x) = x$

Ausblick: Wachstum und Zerfall

www.raphael-beine.de