423

I Unbegrenztes Wachstum

Zeit [h]	0	1	2	3	4	5
Bakterienanzahl [in Millionen]	80	145	267	482	876	1598

(a) Aufstellen einer Wachstumsfunktion B(t)

(b) Berechnen der sog. „Verdopplungszeit"

(c) Berechne die Wachstumsgeschwindigkeit/-rate
Zuwachsrate zu den Zeitpunkten $t_0=0$ und $t_5=5$

(d) Berechne die mittlere Wachstumsrate

https://www.youtube.com/user/Mathematikaufgaben/playlists

24a) Wir wählen den Ansatz

$$B(t) = B_0 \cdot e^{kt}$$

B_0: Anfangsbestand zum Zeitpunkt t_0

<u>Hinweis</u>

mit $B(t) = B_0 \cdot e^{kt}$ ist

$B'(t) = B_0 \cdot k \cdot e^{kt}$ und wenn

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{B_0 \cdot k \cdot e^{kt}}{B_0 \cdot e^{kt}} = k \text{ d.h.}$$

Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums

$\boxed{B'(t) = k \cdot B(t)}$ oder

$B'(t) \sim B(t)$ [ist proportional zu]

Es ist $B_0 = 80$

$\Rightarrow B(t) = 80 \cdot e^{kt}$ und z.B. $(1/145)$

$145 = 80 \cdot e^{k \cdot 1} \quad | : 80$

$\frac{145}{80} = e^{k} \quad |$ ln, beiden Seiten > 0

$\ln\left(\frac{145}{80}\right) = k$

$k \approx 0{,}6$ d.h. $\underline{\underline{B(t) = 80 \cdot e^{0{,}6t}}}$

zu b)

Verdopplungszeit

Gesucht ist der Zeitpunkt t, an dem sich der Bestand annähernd verdoppelt hat:

$$\underbrace{160}_{2\cdot B_0} = 80\cdot e^{0,6t} \quad \Big|:80$$

$$2 = e^{0,6t} \quad \Big|\ \ln$$

$$\ln(2) = 0,6t \quad \Big|:0,6$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0,6}$$

$$t \approx 1,16 \quad [\text{s. Tabelle}]$$

Verallgemeinerung

$$2\cdot B_0 = B_0\cdot e^{kt} \quad \Big|:B_0$$

$$2 = e^{kt} \quad \Big|\ \ln$$

$$\ln(2) = \ln(e^{kt})$$

$$\ln(2) = k\cdot t \quad \Big|:t$$

$$t_{\text{Verdopplung}} = \frac{\ln(2)}{k}$$

$\boxed{\text{zu c}}$ Leitet man die „Bestandsfunktion" ab, so erhält man die „Wachstumsgeschwindigkeit"

$$B(t) = 80 \cdot e^{0{,}6t}$$

$$B'(t) = 80 \cdot \underbrace{0{,}6}_{\text{innere Abl.}} \cdot \underbrace{e^{0{,}6t}}_{\text{äußere Abl.}}$$

$$\underline{\underline{B'(t) = 48{,}0 \cdot e^{0{,}6t}}}$$

$t = 0$

$$B'(0) = 48 \cdot e^{0{,}6 \cdot 0} = 48 \cdot e^{0} = 48 \cdot 1 = \underline{\underline{48}}$$

$t = 5$

$$B'(5) = 48 \cdot e^{0{,}6 \cdot 5} = 48 \cdot e^{3} \approx 964{,}11$$

[eine beeindruckende Zunahme]

Interpretation im Sachzusammenhang:

Die momentane Wachstumsrate beträgt zum Zeitpunkt $t=0$ $48 \cdot 10^6$ Bakterien pro Stunde, zum Zeitpunkt $t=5$ $964 \cdot 10^6$ Bakterien pro Stde.

$\boxed{\text{zu d}}$ Die „mittlere Zuwachsrate" $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ berechnen wir auf die gegebene ~~Tafel~~ Tabelle:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(5) - B(0)}{5 - 0} = \frac{1598 - 80}{5}$$

$$= \frac{1518}{5} = 303{,}6$$

<u>Interpretation im Sachzusammenhang:</u>

Die „mittlere Zuwachsrate" beträgt $303{,}6 \cdot 10^6$ Bakterien pro Stunde.

II Unbegrenzter Zerfall

Untersucht werden 100 µg Caesium 137.
Die Halbwertszeit beträgt 30 Jahre.

(a) Aufstellen einer Zerfallsfunktion

t [Jahre]	0	30
Menge [µg]	100	50

<u>Ansatz</u> $z(t) = z_0 \cdot e^{-kt}$

Zerfall!

$$z_0 = 100$$

$$z(t) = 100 \cdot e^{-kt} \quad | \; (30/50)$$

$$50 = 100 \cdot e^{-30k} \quad | :100$$

$$0{,}5 = e^{-30k} \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}5) = -30k \quad | :(-30)$$

$$k = \frac{\ln 0{,}5}{-30} \approx 0{,}0231$$

$$\boxed{z(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0231 \cdot t}}$$

b) Wann ist die aktive Masse auf 0,1% des Anfangsbestandes gesunken?

0,1% von 100 [µg]

$$= \frac{0{,}1}{100} \cdot 100 = 0{,}1\,[\mu g]$$

<u>Ansatz</u> Gesucht ist der Zeitpunkt t mit

$$\underbrace{0{,}1}_{\text{vorgegebene Bestand}} = \underbrace{100 \cdot e^{-0{,}0231t}}_{\text{Bestand}} \qquad | :100$$

$$\frac{0{,}1}{100} = e^{-0{,}0231t} \qquad | \ln$$

$$\ln(0{,}001) = -0{,}0231 \cdot t \qquad | : -0{,}0231$$

$$t = -\frac{\ln(0{,}001)}{0{,}0231} \approx \underline{\underline{299}}\,[\text{Jahre}]$$

c) Berechnung der Zerfallsgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_{299} = 299$

Die Zerfallsgeschwindigkeit wird mit Hilfe der ersten Ableitung angegeben:

$$z(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0231t}$$

$$z'(t) = 100 \cdot \underbrace{(-0{,}0231)}_{\text{innerer Teil}} \cdot \underbrace{e^{-0{,}0231t}}_{\text{äußerer Teil}}$$

$$z'(t) = -2{,}31 \cdot e^{-0{,}0231t}$$

$$z'(0) = -2{,}31 \cdot e^{0}$$

$$= -2{,}31 \ \mu g / \text{Jahr}$$

$$z'(299) = -2{,}31 \cdot e^{-0{,}0231 \cdot 299}$$

$$= -0{,}0046 \ \mu g / \text{Jahr}$$

Im Sachzusammenhang ist das Minuszeichen entsprechend zu deuten.