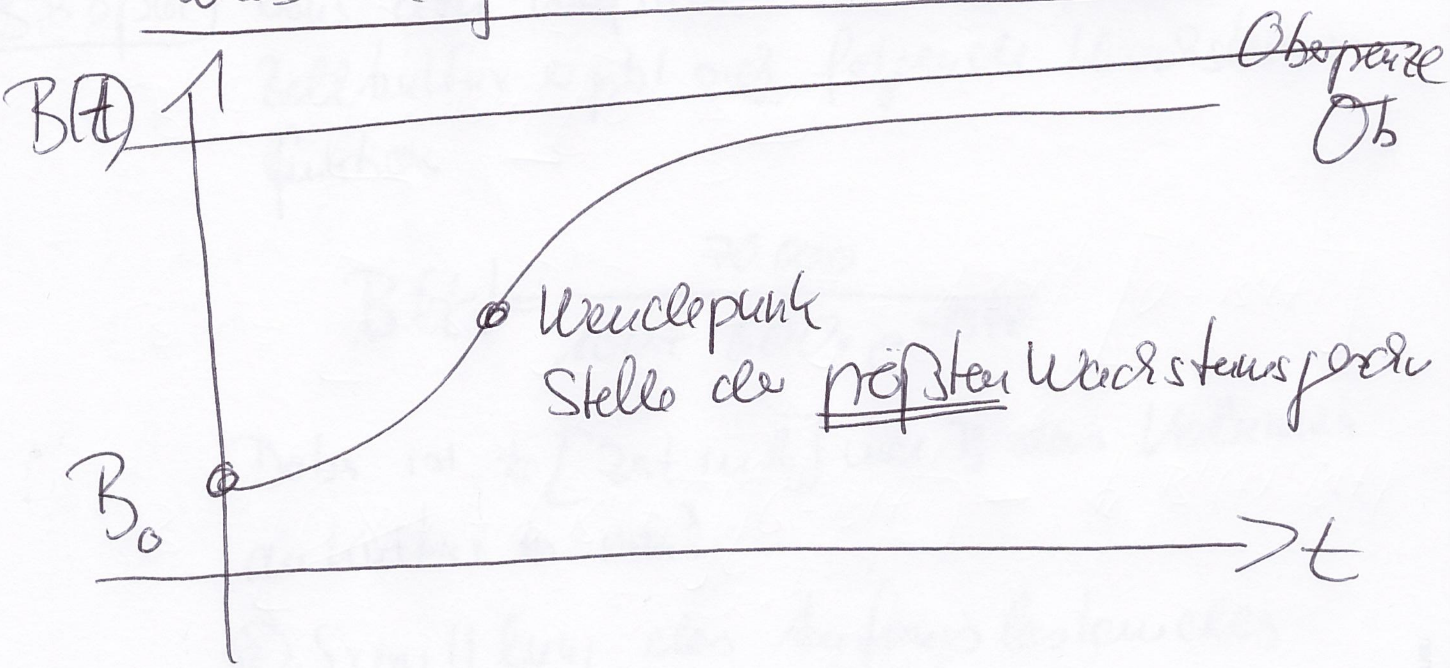
Das logistische Wachstum



Wachstumsfunktion

$$B(t) = \frac{B_0 \cdot Ob}{B_0 + (Ob - B_0) \cdot e^{-Ob\,k \cdot t}}$$

zugehörige Differentialgleichung:

$$B'(t) = k \cdot B(t) \cdot [Ob - B(t)]$$

Beispiel Aus den Meßwerten des Wachstums einer Zellkultur ergibt sich folgende Wachstumsfunktion

$$B(t) = \frac{70\,000}{100 + 600 \cdot e^{-0{,}4t}}$$

Dabei ist t [Zeit in h] und B das Volumen der Kultur in mm^3.

(a) Ermittlung des Anfangsbestandes

(b) Berechnung der Obergrenze Ob

(c) Skizzierung mit GEOGEBRA.

Zu a Der Anfangsbestand wird angegeben durch

$$B(0) = \frac{70\,000}{100 + \underbrace{600 \cdot e^{-0{,}4 \cdot 0}}_{\substack{=600 \cdot 1 \\ =600}}}$$

$$= \frac{70\,0\cancel{00}}{7\cancel{00}} = 1000\ [mm^3]$$

zu b) Wir „berechnen" die Obergrenze durch

$$Ob = \lim_{t\to\infty} B(t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{70.000}{100 + 600 \cdot \underbrace{e^{-0,4t}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0}}$$

$$\overset{!}{=} \frac{70.000}{100 + 600 \cdot 0}$$

$$\underline{\underline{= 700}} \; [mm^3]$$

zu c) Grafik

2. Beispiel Ein Warenbestand kann – seit dem Jahr 2000 – in etwa beschrieben werden durch

$$B(t) = \frac{4000}{20 + 380 \cdot e^{-0{,}95 \cdot t}}$$

Dabei ist t die Anzahl der Jahre seit 2000, B(t) der Bestand [in Hundertern]

(a) Gib B(0) den Anfangsbestand an

(b) Gib Ob (die Obergrenze) an.

(c) Berechne die maximale Zuwachsrate.

(d) Grafik mit Geogebra

$\boxed{244a}$

$$B(t) = \frac{40\,000}{20 + 380 \cdot e^{-0{,}95 \cdot t}}$$

$$B_0 = B(0) = \frac{40\,000}{20 + \underbrace{380 \cdot \underbrace{e^{-0{,}95 \cdot 0}}_{=1}}_{=380}}$$

$$= \frac{40\,000}{400}$$

$$= \underline{\underline{100}} \quad [\text{in Hunderte}]$$

zu b

$$Ob = \lim_{t \to \infty} B(t)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{40.000}{20 + 380 \cdot \underbrace{e^{-0{,}95 \cdot t}}_{\xrightarrow[t \to \infty]{} 0}}$$

$$\overset{!}{=} \frac{40.000}{20 + 380 \cdot 0}$$

$$= \underline{\underline{2.000}} \text{ [in Hundert]}$$

zu c) Die maximale Zuwachsrate wird angegeben durch $B''(t) = 0$

[~~hin~~ notw Bed für Wendestelle]

Zur Herleitung benötigt man die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums:

$$B'(t) = k \cdot B(t) \cdot [Ob - B(t)]$$

$$\Leftrightarrow \quad B'(t) = k \cdot Ob \cdot B(t) - k \cdot B^2(t)$$

$$\overset{\text{ableite}}{\Longleftrightarrow} \quad B''(t) = \underbrace{k \cdot Ob}_{\text{const}} \cdot B'(t) - k \cdot 2 \cdot B(t) \cdot B'(t)$$

[denn $B^2(t) = B(t) \cdot B(t)$
also $\boxed{B^2(t)}' = B'(t) \cdot B(t) + B(t) \cdot B'(t)$
$= 2 \cdot B(t) \cdot B'(t)$]

$\boxed{B''(t) = 0}$ s.o.

$\Leftrightarrow$

$$k \cdot Ob \cdot B'(t) - 2k \cdot B'(t) \cdot B(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{k \cdot B'(t)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left[Ob - 2\cancel{k} \cdot B(t) \right]}_{} = 0$$

$$\Leftrightarrow Ob - 2 \cdot B(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ob = 2 \cdot B(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B(t) = \frac{1}{2} \cdot Ob}$$

Wendepunktbedingung beim logistischen Wachstum

d.h.

$$\frac{40000}{20+380 \cdot e^{-0{,}95t}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{2000}_{Ob}$$

$$\Leftrightarrow \frac{40000}{20+380 \cdot e^{-0{,}95t}} = 1000 \quad | \cdot [\text{Nenner}]$$

$$\Leftrightarrow 40.000 = 1000 \left[20 + 380 e^{-0{,}95t} \right] \quad | : 1000$$

$$40 = 20 + 380 e^{-0{,}95t} \quad | -20$$

$$20 = 380 \cdot e^{-0{,}95t} \quad | :380$$

$$\frac{1}{19} = e^{-0{,}95t} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{19}\right) = -0{,}95 \cdot t \quad | :-0{,}95$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{19}\right)}{-0{,}95}$$

$$\underline{\underline{\approx 3{,}1}} \quad [\text{in Jahren ab } 2000]$$

(d) Grafik

0

9 –

Logistisches Wachstum

Theoretisches Beispiel

Durch die Bestandsfunktion $B(t)=\frac{24}{2+10e^{-0,5t}}$

wird ein Bestand in Abhängigkeit der Zeit beschrieben

(a) Graphische Darstellung mit Geogebra

(b) Gesucht ist der Anfangsbestand $B_0=B(0)$
und der „Grenzbestand" $G=\lim\limits_{t\to\infty} B(t)$

(c) Berechne (!) und skizziere $B'(t)$

(d) Untersuche mit Hilfe von Geogebra den Graphen von $B'(t)$ auf Extrema!

(e) Benutze d: Wo ist die Wachstums-geschwindigkeit des Bestandes maximal?

$\boxed{24b}$ Mit $B(t) = \dfrac{24}{2 + 10e^{-0{,}5t}}$ ist

$$B_0 = B(0) = \frac{24}{2 + 10 \cdot \underbrace{e^{-0{,}5 \cdot 0}}_{=1}}$$

$$= \frac{24}{2+10} = \underline{\underline{2}}$$

und weiter

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{24}{2 + 10 \cdot \underbrace{e^{-0{,}5 \cdot t}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0}} \right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{24}{2 + 10 \cdot 0} = \underline{\underline{12}}$$

$\boxed{2 uc}$ $B(t) = \frac{24}{2+10 \cdot e^{-0,5t}}$

Wir wählen die Quotientenregel

$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ⟵ niemals auflösen!!

$u(x) = 24 \quad u'(x) = 0$

$v(x) = 2 + 10 \cdot e^{-0,5t}$

$v'(x) = 0 + \underbrace{10 \cdot (-0,5)}_{\text{innere A}} \cdot \underbrace{e^{-0,5t}}_{\text{äußere A}}$

$= -5e^{-0,5t}$

$B'(t) = \frac{0 \cdot [2+10e^{-0,5t}] - 24 \cdot (-5e^{-0,5t})}{[2+10e^{-0,5t}]^2}$ ⟵ niemals auflösen!

$= \frac{+120e^{-0,5t}}{[2+10e^{-0,5t}]^2}$

B'(t) mit Geogebra

zu d) Wir untersuchen den Graphen von $B'(t)$ auf Extrema, d.h. wir untersuchen:

$$[B'(t)]' \stackrel{!}{=} 0$$

[Wendestellenkandidaten von $B(t)$ bzw. Extremstellenkandidaten von $B'(t)$]

Die Grafik liefert uns:

$$\underline{x \approx 3{,}22}$$

<u>Hinweis</u>: Leitet man $B'(t)$ erneut nach der Quotientenregel ab, setzt $B''(t)=0$, dann erhält man [als Ansatzlösung]

$$\underline{t \approx 3{,}21}$$

<u>Ausblick</u> Kurvendiskussion gebrochen-rationale Funktionen