1

Kurvendiskussion

1. Beispiel Trigonometrische Funktion

$f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$

a) Periode

$f_1(x) = \sin(x)$ mit $p_1 = k_1 \cdot (2\pi)$ $k_1 \in \mathbb{Z}$

$f_2(x) = \cos(2x)$ mit $p_2 = k_2 \cdot (\pi)$ $k_2 \in \mathbb{Z}$

Gesucht Das kleinste gemeinsame Vielfache der zwei „Einzelperioden":

$$n \cdot p_1 = m \cdot p_2$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot 2\pi = m \cdot \pi \quad | : m \; / : 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{m} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \text{ [oder Vielfache]}$$

$$n = 1 \quad m = 2$$

$$\underline{\underline{n = 1}} \quad n \cdot p_1 = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

$$\underline{\underline{m = 2}} \quad m \cdot p_2 = 2 \cdot \pi = 2\pi$$

Probe $f(x + 2\pi) \overset{?}{=} f(x)$

$$f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$$

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) - \cos(2x-2\pi)$$

$$= \sin(x) - \cos(2x)$$

b) Nullstellen

Lösungen von trigon. Gleichungen + verschiedene Verfahren:

Video Nr. 253 → 256 unter Playlist „Wiederholung Klasse 10"

Wegen $\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$ gilt

$$\sin(x) - \cos(2x) = 0 \iff$$

$$\sin(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0 \quad \boxed{\cos^2 = 1 - \sin^2}$$

$$\sin(x) - 1 + \sin^2 + \sin^2 = 0$$

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0 \quad | :2 \quad | \quad \sin(x) = z$$

$$\sin^2(x) + \tfrac{1}{2}\sin(x) - \tfrac{1}{2} = 0 \quad |$$

$$\sin_{1/2}(x) = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\sin_1(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{\pi}{6}}} ; \underline{\underline{x_2 = \frac{5\pi}{6}}}$$

$$\sin_2(x) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = \frac{3}{2}\pi}}$$

Ableitungen $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$

$$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot (-\sin(2x))$$

$$= \cos x + 2 \sin(2x)$$

$$f''(x) = -\sin x + 2 \cdot 2 \cdot \cos(2x)$$

$$= -\sin x + 4 \cos(2x)$$

Das ~~läst~~

$$f'''(x) = -\cos x + 4 \cdot 2 \cdot (-\sin(2x))$$

$$= -\cos x - 8 \sin(2x)$$

Das lässt man erst einmal so stehen.

Extrema notw. Bed $f'(x)=0$

$f'(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) + 2 \cdot [2\sin(x) \cdot \cos(x)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) + 4 \sin x \cdot \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x)[1 + 4\sin(x)] = 0$

1. Fall $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$

2. Fall $1 + 4\sin(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x) = -0{,}25$

$\Leftrightarrow \quad x_3 \approx 3.4 \quad x_4 \approx 6{,}0$

hinr. Bed $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(x) = -\sin x + 4 \cdot \cos(2x)$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ Max (TR) bei $\left(\frac{\pi}{2} \middle| f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0$ Max $\left(\frac{3\pi}{2} \middle| f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$f''(3.4) > 0$ Min $(3.4 | f(3.4))$

$f''(6.0) > 0$ Min $(6 | f(6))$

Wendestelle vol. 8d

$$f''(x) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x + 4 \cdot \cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x + 4\left[1 - 2\sin^2(x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x + 4 - 8\sin^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8\sin^2(x) - \sin(x) + 4 = 0 \quad |:-8$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(x) + \frac{1}{8}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin(x)_{1/2} = -\frac{1}{16} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{16}\right]^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1}{256} + \frac{128}{256}}$$

$$= -\frac{1}{16} \pm \frac{1}{16}\sqrt{129}$$

Der TR liefert:

$x_1 \approx 0{,}7$ $x_2 \approx 2{,}4$ $x_3 \approx 4$ $x_4 \approx 5{,}4$

Für alle Werte gilt $f'''(x) \neq 0$, also liegen Wendepunkte vor:

$W_1(0{,}7|0{,}5)$ $W_2(2{,}4|0{,}5)$ $W_3(4|-0{,}6)$

$W_4(5{,}4|-0{,}6)$ auf $0 \leq x < 2\pi$

Grafik