Kurvendiskussion

$$f(x) = \tan(x) - \sin(2x)$$

$$D(f) = \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$$

1. Grafik mit Geogebra

2. Symmetrien

$$f(x) = f(-x)$$

$$-f(x) = f(-x)$$

$$f(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x)$$

$$= -\tan(x) + \sin(2x)$$

$$-f(x) = -[\tan(x) - \sin(2x)]$$

$$= -\tan x + \sin(2x)$$

also $f(-x) = -f(x)$: Nullpunktsymmetrie

Nullstellen lösen trigonometrische Gleichungen siehe Video Nr 253 ff

2

$$\tan(x) - \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(2x) = 0 \qquad \cos x \neq 0$$

$$\sin x - \cos x \cdot \underline{\sin(2x)} = 0$$

~~sin x~~

$$\sin(x) - \cos x \cdot \underline{2 \sin x \cos x} = 0 \quad \Big| : \sin x \neq 0$$

$$1 - 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{4}\pi}} \qquad \underbrace{x_2 = \frac{3}{4}\pi}_{\notin D(1)}$$

oder $\underline{\underline{x_2 = -\frac{1}{4}\pi}}$ wg Symmetrie

Kontrolle: Grafik!

Wir haben bis der Rechnung bemerkt (3)

$\cos x \neq 0$

auf $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ offen(!)

ist das erlaubt

$\sin x = 0$ auf $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ gilt das

<u>nicht</u> für $x = 0$

<u>gesamte Nullstellen</u> $x_1 = -\frac{1}{4}\pi$; $x_2 = 0$; $x_3 = +\frac{1}{4}\pi$

Extrema $f'(x)=0$ notw Bed. 4

$$f(x)=\tan x - \sin(2x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} - 2\cdot \underline{\cos(2x)}$$

$$=\frac{1}{\cos^2(x)} - 2\cdot \left[\underline{2\cos^2(x)-1}\right]$$

Wir substituieren $\cos^2(x)=z$

$$\frac{1}{z}-4z+2=0 \quad |\cdot z$$

$$1-4z^2+2z=0$$

$$4z^2-2z-1=0 \quad |:4$$

$$z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}=0$$

$$z_{1/2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}$$

$$z_1\approx -0{,}3$$

$$z_2\approx 0{,}81$$

Rücksubstitution

$$\cos^2 x = -0{,}3$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos x\right]^2 = -0{,}3 \quad ↯$$

$$\cos^2 x = 0{,}81$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x) = \pm 0{,}9$$

$$\cos(x) = 0{,}9 \quad x_1 \approx 0{,}45$$

$$x_2 \approx 2{,}6 \notin D(f)$$

Wegen der Symmetrie ist

$x_1 \approx 0{,}45$ $x_2 \approx -0{,}45$ Extremstelle n

Hinreichende Bedingung und Wendestelle ⑥

Hinr Bed $f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-2\cos(2x)$$

$$=\left[\cos(x)\right]^{-2}-2\cdot\cos(2x)$$

$$f''(x)=-\sin(x)\cdot(-2)\cdot\left[\cos(x)\right]^{-3}-2\cdot 2\cdot(-\sin(2x))$$

$$=\cancel{2\sin}$$

$$=\cancel{2\cos}$$

$$=\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}+4\sin(2x)$$

TR

$g''(0{,}45)>0$ Mini

$g''(-0{,}45)<0$ Maxi

Wendestelle notw. Bed. $f''(x)=0$ (7)

$$\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + 4\sin(2x) = 0 \quad \Big| \cdot \cos^3 x$$

$$2\sin x + 4\cos^3 x \cdot \sin(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x + 4\cos^3 x \cdot 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cdot \left[1 + 4\cos^4 x\right] = 0$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ auf } \left]-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4\cos^4 x = 0$$

$$\cos^4 x = -\tfrac{1}{4} \quad \lightning$$

$x=0$ ist Wendestellenkandidat, auf $f'''(x) \neq 0$ verzichtet man dankend, man wählt also das Vorzeichenkriterium

z.B. $f''(+0.1) \overset{TR}{>} 0$

$f''(-0.1) \overset{TR}{<} 0$

Ende