2. Kudr $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ 455

a) $D(f)$?

b) Asymptoten?

c) Nullstellen?

d) Schnitt mit der y-Achse?

e) Symmetrien?

f) graphische Darstellung?

g) Extrema? Ohne 2. Ableitung

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Zur Wiederholung

$h(x) = \arccos(x)$

$D(h) = [-1; 1]$

$W(h) = [0; \pi]$

und $h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit $D(h') =]-1; 1[$

(a) D(f)

Für das Argument der Funktion f – also $\frac{x}{1+x^2}$ – muß gelten

$$-1 \le \frac{x}{1+x^2} \le 1$$

Das aber gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ also ist $D(f) = \mathbb{R}$.

Nachweis 1. Schritt

$-1 \le \frac{x}{1+x^2} \quad | \cdot (1+x^2) > 0$

$-1 - x^2 \le x \quad | + x^2 + 1$

$0 \le x^2 + x + 1$

z.B. liegt der Graph von x^2+x+1 stets oberhalb der x-Achse

Nachweis 2. Schritt

$\frac{x}{1+x^2} \le 1 \quad | \cdot (1+x^2) > 0$

$x \le 1 + x^2 \quad | -x$

$0 < x^2 - x + 1$ s.o.

2) Asymptoten

Da der Nenner des Bruches $\frac{x}{1+x^2}$ niemals verschwindet, betrachten wir

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$\overset{!}{=} \arccos\left[\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+x^2}\right]$$

$$= \arccos(0) \approx 1{,}57$$

$y = 1{,}57$ ist Asymptote zu $f(x)$

(c) Nullstelle

Die Funktion $f(x) = \arccos(x)$ hat bei $x=1$ bzw $x=-1$ eine Nullstelle

Wo ist also $\frac{x}{1+x^2} \overset{?}{=} 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \quad ↯$$

Wo ist also $\frac{x}{1+x^2} \overset{?}{=} -1 \quad \Big| \cdot (1+x^2)$

$$x = -1 - x^2 \quad \big| +1 + x^2$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \quad ↯$$

Es gibt keine Nullstellen.

(d) Schnitt mit der y-Achse

Kennzeichen ist: $x=0$

$$f(0)=\arccos\left(\frac{0}{1+0^2}\right)=\arccos(0)\approx 1.57$$

$(0|1.57)$

(e) Symmetrie

$$f(x)=\arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Geogebra: Verschiebt man den Graphen derart, daß er durch $(0|0)$ geht, so kann man Nullpunktsymmetrie bezeugen..

$$f_{neu}(x)=\arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\underbrace{-\frac{\pi}{2}}$$

z.z. $f_{neu}(-x)=-f_{neu}(x)$

Man benutzt:

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)}$$

$$f_{neu}(-x) = \arccos\left(-\frac{x}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\overset{so}{=} \pi - \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$= -\arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$-f_{neu}(x) = -\left[\arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -\arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

q. e. d.

(f) Graphische Darstellung mit Geogebra

g) Extrema

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$f'(x) = \underbrace{\left[\frac{x}{1+x^2}\right]'}_{\text{inner der}} \cdot \arccos'\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$= \left[\frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right] \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \left[\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right] \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \iff -1+x^2 = 0$$

$$\iff x^2 = 1$$

$$\iff x_1 = +1 \lor x_2 = -1$$

Zum Nachweis: Max/Min wählen wir das Vorzeichenwechsel

$$f'(+1-\varepsilon) \stackrel{\wedge}{=} f'(+1-0.01) = f'(0.99) \approx -0{,}006$$

$$f'(+1+\varepsilon) \stackrel{\wedge}{=} f'(+1+0.01) = f'(1.01) \approx +0{,}006$$

$$f'(-1-\varepsilon) \stackrel{\wedge}{=} f'(-1-0.01) = f'(-1{,}01) \approx +0{,}006$$

$$f'(-1+\varepsilon) \stackrel{\wedge}{=} f'(-1+0.01) = f'(-0.99) \approx -0{,}006$$

Vorzeichenwechsel von - nach +: Mini

Vorzeichenwechsel von + nach -: Maxi.