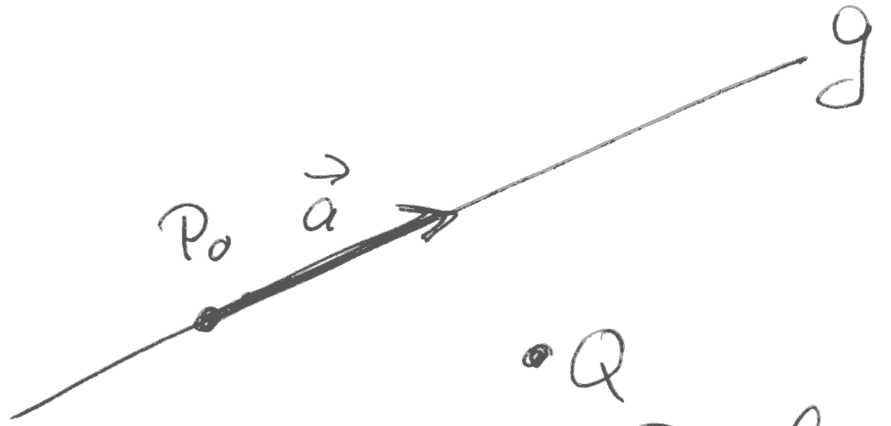
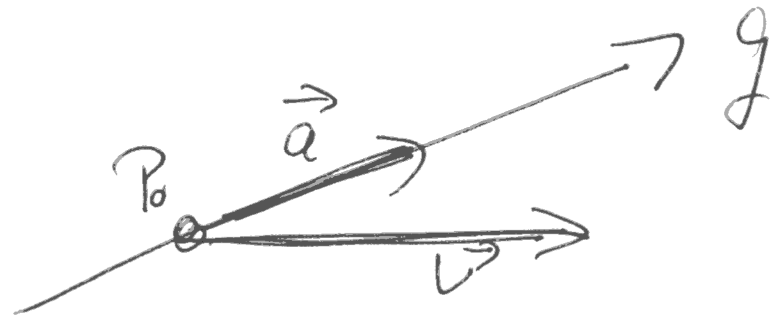
Ebenen

Erklärung – Parameterform – Grundaufgaben

Erweitert man eine Gerade g mit Punkt P_0 und Richtungsvektor $\vec{a}$ um einen weiteren Punkt Q, der nicht auf g liegt



oder um einen zu $\vec{a}$ l.u. (zweiten) Richtungsvektor $\vec{v}$



so erhält man eine Ebene:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{a}}_{\text{Gerade}} + \underbrace{\mu \cdot \vec{v}}_{2.\,\vec{RV}}$$

oder

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{a}}_{\text{Gerade}} + \mu \cdot \underbrace{\overrightarrow{PQ}}_{2.\,RV}$$

„Parameterdarstellung einer Ebene"

<u>Hinweis</u>

Wegen der mathematischen „<u>Sperrigkeit</u>" dieser „Formel" weicht man in rechnerischen Fällen <u>fast immer</u> auf die

<u>Normalenform der Ebene</u> (kommt noch)

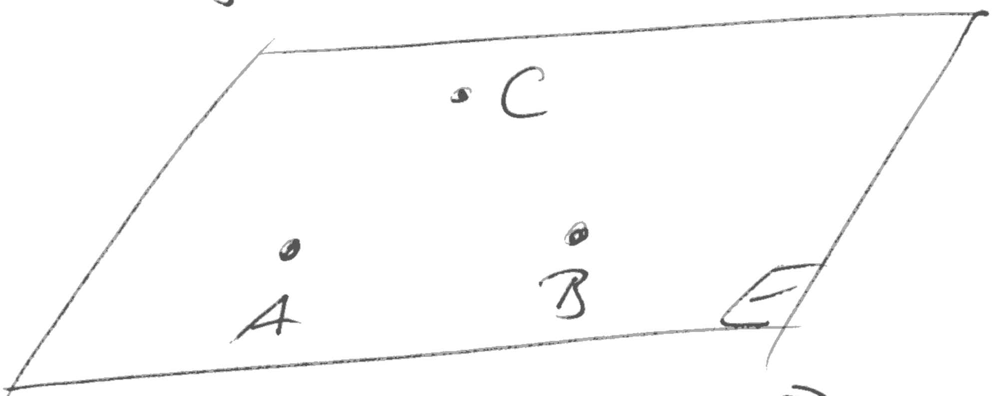
oder auf die

<u>Koordinatenform der Ebene</u>

aus.

Grundaufgaben

(1) 3 Punkte, die nicht alle drei auf einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene E eindeutig



$$E:\ \vec{x} = \vec{x}_0 + r\cdot\underbrace{\vec{a}}_{1.RV} + s\cdot\underbrace{\vec{b}}_{2.RV}$$

Punkt auf E

l.u.!!

$A(1|2|1)\quad B(2|3|0)\quad C(1|1|4)$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ z.B.!!

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z.B} + \underbrace{r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{l.u.!!!}$$ (3)

② Eine Ebene E enthalte die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Punkt $P(0|0|3)$

ⓐ Liegt $P \in g$?

ⓑ Gesucht ist E mit $g \subset E$ und $P \in E$

zu a)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -2 = \alpha \\ -1 = 2\alpha \\ 3 = \alpha \end{array} \quad ↯ \quad P \notin g!$$

zu b)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{- \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-P_0} \right] \triangleq \overrightarrow{P_0P}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

l.u.

③ Prüfe, ob

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sich schneiden,}$$

wenn ja, bestimme E mit

$$g_1, g_2 \in E$$

$\underline{\underline{g_1 \cap g_2}}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

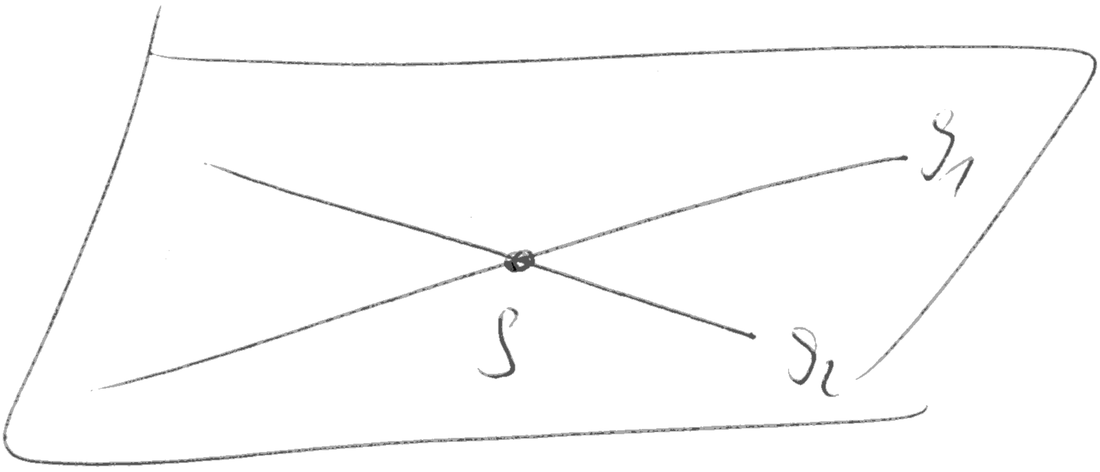
$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 4\beta = 4 \\ \alpha - \beta = 1 \end{array} \right| \Longrightarrow \alpha = 1 + \beta$$

$$\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1 + \beta - 2\beta = 2 \\ 1 + \beta - 4\beta = 4 \\ 1 + \beta - \beta = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \beta = -1 \\ \beta = -1 \\ \checkmark \end{array}$$

$\beta = -1$: $S(2|4|3)$

$$E: \vec{x} = \underset{\text{z.B}}{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}} + r \cdot \underset{\substack{\text{RV}\\ g_1}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} + s \underset{\substack{\text{RV}\\ g_2}}{\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}}$$

l.u.



Liegt ein Punkt P_0 in einer Ebene E?

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \underbrace{r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{lu.!}}$$

$$P_0(1|1|0) \in E \; ?$$

Ansatz

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 2r + s = 0 \\ r + s = -1 \\ s = -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} 0 - 1 = 0 \; ↯ \\ r = 0 \\ s = -1 \end{array}$$

$$P_0 \notin E$$

Gib 3 Punkte an, die in E liegen!

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l.u.!

$P_1(1|2|1)$

P_2 mit $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+0+1 \\ 2+0+1 \\ 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P_2(2|3|2)$

P_3 mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+2+0 \\ 2+1+0 \\ 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8

$P_3(3|3|1)$

Alle anderen Aufgaben, besonders Schnittaufgaben $E \cap E$ bzw $E \cap g$ sollte man nicht mit der Parameterform der Ebene berechnen: der Rechenaufwand ist zu groß

Ausblick

→ Länge, Abstände, Winkel

→ Normalenform, Hesseform Schnittaufgaben

→ Vektorprodukt

→ Teilverhältnisse

Geradenscharen auf meinem Kanal „Mathematikaufgaben"

siehe Playlists

www. raphael-bravo. de